Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră numărul natural $n \geq 3$ cu proprietatea că $3n+1$ este pătrat perfect. Arătaţi că există trei numere naturale nenule a, b, c astfel încât numărul

$$x = \sqrt{1 + \frac{3n+3}{a^2+b^2+c^2}}$$

să fie natural.

Soluţie.
Restul împărţirii pătratului unui număr natural a la 3 este 0 (dacă a este multiplu de 3) sau 1 (dacă a nu este multiplu de 3) **1p**
Ca urmare, dacă $3n+1$ este pătrat perfect, atunci există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât fie $n = 3p+1$ sau există $q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = 3q+2$ **2p**
În primul caz obţinem $3n+3 = 9p^2+6p+3 = 3\left[\left(p^2+p^2+(p+1)^2\right)\right]$, deci putem considera $a = b = p$ şi $c = p+1$, pentru care $x = 2 \in \mathbb{N}$ **2p**
În al doilea caz rezultă $3n+3 = 9q^2+12q+6 = 3\left[\left(q^2+(q+1)^2+(q+1)^2\right)\right]$, deci putem considera $a = q$ şi $b = c = q+1$, pentru care $x = 2 \in \mathbb{N}$ **2p**

Problema 2. Fie $E(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{x+1}{y+1} + \dfrac{x+2}{y+2}$.
a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $E(x,y) = 3$.
b) Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care ecuaţia $E(x,y) = n$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

Gazeta Matematică **Soluţie.**

a) Ecuaţia se scrie sub forma $\left(\dfrac{x}{y}-1\right) + \left(\dfrac{x+1}{y+1}-1\right) + \left(\dfrac{x+2}{y+2}-1\right) = 0$, echivalent cu $(x-y)\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{y+2}\right) = 0$ **2p**
Soluţiile ecuaţiei sunt perechile (k,k), cu $k \in \mathbb{N}^*$ **1p**
b) $E(6k+1) = 6k+1+3k+1+2k+1 = 11k+3, k \in \mathbb{N}$........................**2p**
Deci pentru $n = 11k+3, k \in \mathbb{N}$ ecuaţia $E(x,y) = n$ are soluţia $(6k+1,1)$ **2p**

Comentariu. În general, dacă $y \in \mathbb{N}^*$ este ales arbitrar, iar $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{y+2} = \dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$, atunci, considerând $x = kb+y$, $k \in \mathbb{N}$, rezultă că pentru orice număr natural $n = ka+3$, perechile de forma $(ka+y, y)$ sunt soluţii ale ecuaţiei $E(x,y) = n$.

Problema 3. Pe latura $[CD]$ a pătratului $ABCD$ se consideră punctul E astfel încât $m(\sphericalangle ABE) = 60°$, iar pe semidreapta $(BA$ se ia punctul F astfel încât $[BE] \equiv [BF]$. Se notează cu M punctul de intersecţie al dreptelor EF şi AD.
a) Arătaţi că $m(\sphericalangle BME) = 75°$.

b) Bisectoarea unghiului CBE intersectează dreapta CD în punctul N. Arătaţi că triunghiul BMN este echilateral.

Soluţie

a) $m(\sphericalangle MEB) = m(\sphericalangle CEB) = 60°$, deci $[EB$ este bisectoare exterioară a triunghiului MDE **1p**

$m(\sphericalangle MDB) = m(\sphericalangle BDE) = 45°$, deci $[DB$ este bisectoare interioară a triunghiului MDE **1p**

Aşadar $[MB$ este bisectoarea unghiului AME şi, cum $m(\sphericalangle AME) = 150°$, rezultă că $m(\sphericalangle BME) = 75°$ **2p**

b) $\Delta BAM \equiv \Delta BCN$ (CU), de unde $BM = BN$ **2p**

$m(\sphericalangle BMN) = 90° - m(\sphericalangle ABM) - m(\sphericalangle CBN) = 60°$, deci triunghiul BMN este echilateral **1p**

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC, cu $m(\sphericalangle A) < m(\sphericalangle C)$. Punctul E aparţine bisectoarei interioare a unghiului B astfel încât $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle ACB$. Fie D un punct pe dreapta BC astfel încât $B \in (CD)$ şi $[BD] \equiv [AB]$. Arătaţi că mijlocul M al segmentului $[AC]$ este situat pe dreapta DE.

Soluţie.

Fie N mijlocul segmentului $[AD]$; rezultă $BN \perp AD$. Construim $AP \perp BE$, $P \in BE$; atunci patrulaterul $BNAP$ este dreptunghi **1p**

Cum punctele N şi P sunt proiecţiile punctului A pe bisectoarele interioară, respectiv exterioară ale unghiului ABC, rezultă că dreapta NP este dreapta suport a liniei mijlocii a triunghiului ABC, paralelă cu BC, deci $M \in (NP)$ **2p**

Fie $\{F\} = AC \cap BE$; din $\Delta BAE \sim \Delta BCF$ rezultă că $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle BFC \equiv \sphericalangle AFE$, deci triunghiul AEF este isoscel, cu $AE = AF$, de unde deducem că P este mijlocul segmentului $[EF]$ **2p**

În trapezul $ADFE$ punctele N şi P sunt mijloacele bazelor, deci dreapta NP conţine punctul de intersecţie al diagonalelor $[AF]$ şi $[DE]$ ale trapezului. Cum $\{M\} = AC \cap NP$, rezultă $M \in DE$ **2p**