Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a X-a

Problema 1. a) Să se determine $x \in \mathbb{N}$ şi $y \in \mathbb{Q}$ dacă $\sqrt{x+\sqrt{x}} = y$.
b) Să se arate că există o infinitate de perechi $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ astfel încât $\sqrt{x+\sqrt{x}} = y$.

Soluţie. a) Dacă $\sqrt{x+\sqrt{x}} \in \mathbb{Q}$, x trebuie să fie pătrat perfect. Fie $x = n^2$, cu $n \in \mathbb{N}$. Obţinem $n(n+1) = y^2$, şi cum $n^2 \leq n(n+1) < (n+1)^2$, deducem că $n = 0$, deci $x = y = 0$. . . . . 3 p

b) Există o infinitate de triplete pitagoreice (p, q, r) cu $p^2 + q^2 = r^2$. Luând $x = \dfrac{p^4}{q^4}$, obţinem

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{p^2}{q^2}\left(\frac{p^2}{q^2}+1\right)} = \sqrt{\frac{p^2}{q^2}\left(\frac{p^2+q^2}{q^2}\right)} = \frac{pr}{q^2} \in \mathbb{Q}.$$

. . . . 4 p

Problema 2. Determinaţi perechile (x, y) de numere întregi pentru care

$$2^x + \log_3 x = y^2 \text{ şi } 2^y + \log_3 y = x^2.$$

Soluţie. Se obţine imediat egalitatea $2^x + \log_3 x + x^2 = 2^y + \log_3 y + y^2$, şi cum funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(t) = 2^t + \log_3 t + t^2$ este strict crescătoare, deci injectivă, deducem că $x = y$. . . . . 3 p

Pentru a rezolva ecuaţia $2^x + \log_3 x = x^2$, observăm că $1, 2$ şi 4 nu sunt soluţii, iar $x = 3$ este. Pentru $x \in \mathbb{N}, x \geq 5$, se arată inductiv că $2^x > x^2$, prin urmare nu există alte soluţii.

Prin urmare, sistemul iniţial are doar soluţia $(x, y) = (3, 3)$. . . . . 4 p

Problema 3. Fie $a \in (0, +\infty)$. Demonstraţi inegalitatea

$$a^{\sin x} \cdot (a+1)^{\cos x} \geq a, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Soluţie. Dacă $a > 1$, logaritmând în baza a, obţinem inegalitatea echivalentă $\sin x + \cos x \cdot \log_a(a+1) \geq 1$. Cum pentru $x \in [0, \pi/2]$ $\sin x \geq \sin^2 x$ şi $\cos x \geq \cos^2 x$, iar $\log_a(a+1) > 1$, deducem că

$$\sin x + \cos x \cdot \log_a(a+1) \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

. . . . 4p

Pentru $a = 1$, inegalitatea se verifică imediat. 1p

Pentru $a \in (0, 1)$, inegalitatea e echivalentă cu $\sin x + \cos x \cdot \log_a(a+1) \leq 1$, $\forall x \in [0, \pi/2]$, care rezultă uşor, deoarece $\sin x \leq 1$, $\cos x \geq 0$, $\log_a(a+1) < 0$. 2p

Problema 4. Fie $A = \{z \in \mathbb{C} \big| \, |z| = 1\}$.
a) Demonstraţi că $(|z+1| - \sqrt{2})(|z-1| - \sqrt{2}) \leq 0, \forall z \in A$.
b) Demonstraţi că pentru orice $z_1, z_2, \ldots, z_{12} \in A$ există o alegere a semnelor "±" pentru care

$$\sum_{k=1}^{12} |z_k \pm 1| < 17.$$

Soluţie. a) Să observăm că

$$|z+1|^2 + |z-1|^2 = (z+1)(\overline{z}+1) + (z-1)(\overline{z}-1) = 2|z|^2 + 2 = 4,$$

de unde $|z+1|^2 - 2 = 2 - |z-1|^2$, adică

$$\left(|z+1| - \sqrt{2}\right)\left(|z+1| + \sqrt{2}\right) = -\left(|z-1| - \sqrt{2}\right)\left(|z-1| + \sqrt{2}\right),$$

deci, evident, $|z+1| - \sqrt{2}$ şi $|z-1| - \sqrt{2}$ au semne contrare. . . . . 4 p

b) Folosind a), alegem semnele astfel ca $|z_k \pm 1| \leq \sqrt{2}$. Atunci $\sum_{k=1}^{12} |z_k \pm 1| \leq 12\sqrt{2} < 17$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $288 < 289$. 3p