Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încât $a_1 > 2$ şi $a_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{a_n}$, pentru orice $n \geq 1$.

a) Arătaţi că $a_{2n-1} + a_{2n} > 4$, oricare ar fi $n \geq 1$ şi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

b) Determinaţi cel mai mare număr real a pentru care inegalitatea

$$\sqrt{x^2 + a_1^2} + \sqrt{x^2 + a_2^2} + \sqrt{x^2 + a_3^2} + \ldots + \sqrt{x^2 + a_n^2} > n\sqrt{x^2 + a^2}$$

este adevărată oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Gazeta Matematică

Soluţie. a) Observăm că $a_n > 0$ şi $a_{n+1} - 2 = \dfrac{2 - a_n}{a_n}$, $\forall n \geq 1$, deci $a_{2n-1} > 2 > a_{2n}, \forall n \geq 1$. Astfel $a_{2n-1} + a_{2n} - 4 = (a_{2n-1}^2 - 3a_{2n-1} + 2)/a_{2n-1} > 0, \forall n \geq 1$ **2p**

Apoi $|a_n - 2| = \dfrac{|a_{n-1} - 2|}{a_{n-1}} = \ldots = \dfrac{|a_1 - 2|}{a_{n-1}\ldots a_1} \leq \dfrac{1}{2^{[n/2]}}|a_1 - 2| \to 0$ arată că $a_n \to 2$..... **2p**

b) Pentru $x = 0$ rezultă $a < \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$, deci $a \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = 2$ **1p**

Arătăm că inegalitatea este valabilă pentru $a = 2$, deci $a_{\max} = 2$. Pentru aceasta este suficient să dovedim că $\sqrt{x^2 + a_{2n-1}^2} + \sqrt{x^2 + a_{2n}^2} > 2\sqrt{x^2 + 4}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, adică $a_{2n-1}^2 + a_{2n}^2 + 2\sqrt{(x^2 + a_{2n-1}^2)(x^2 + a_{2n}^2)} > 2x^2 + 16$. Cum $a_{2n-1} + a_{2n} > 4$ implică $a_{2n-1}^2 + a_{2n}^2 > 8$, e suficient să arătăm că $a_{2n-1}a_{2n} \geq 4$, ceea ce rezultă din $a_{2n-1} > 2$ şi $a_{2n} = 1 + 2/a_{2n-1}$..... **2p**

Problema 2. a) Arătaţi că există funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile $f \circ g = g \circ f$, $f \circ f = g \circ g$ şi $f(x) \neq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue cu proprietăţile $f \circ g = g \circ f$ şi $f(x) \neq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, atunci $(f \circ f)(x) \neq (g \circ g)(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. a) Funcţiile $f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 1\,, x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1\,, x < 0 \\ -1, x \geq 0 \end{cases}$ îndeplinesc cerinţa **2p**

b) Funcţia $h = f - g$ este continuă şi nu se anulează, deci fie $h(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, fie $h(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ **1p**

În cazul $f(x) > g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ rezultă $f(f(x)) > g(f(x)) = f(g(x)) > g(g(x)), \forall x \in \mathbb{R}$. În cazul $f(x) < g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) < g(f(x)) = f(g(x)) < g(g(x)), \forall x \in \mathbb{R}$ **4p**

Problema 3. Se consideră două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ ce nu comută.

a) Ştiind că $A^3 = B^3$, arătaţi că A^n şi B^n au aceeaşi urmă, pentru orice număr natural nenul n.

b) Daţi exemplu de două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ ce nu comută, astfel ca pentru orice număr natural nenul n, A^n şi B^n să fie diferite dar să aibă aceeaşi urmă.

Soluţie. a) Din $A^3 = B^3$ reiese $\det A = \det B = d$ şi din formula Hamilton-Cayley obţinem $A^2 = aA - dI_2$, $B^2 = bB - dI_2$, cu $a = \operatorname{tr} A$, $b = \operatorname{tr} B$ **1p**

Rezultă $A^3 = aA^2 - dA = (a^2 - d)A - adI_2$ şi $B^3 = (b^2 - d)B - bdI_2$, deci $(a^2 - d)A - adI_2 = (b^2 - d)B - bdI_2 \quad (*)$ **1p**

Prin înmulţire cu B la stânga şi la dreapta se obţine $(a^2-d)BA-adB=(b^2-d)B^2-bdB= =(a^2-d)AB-adB$, adică $d=a^2$. Analog $d=b^2$ şi din (*) deducem $d=0$ sau $a=b$ **1p**

Dacă $d=0$, atunci $a=b=0$, deci $A^2=B^2=O_2$, de unde $A^n=B^n, \forall n\geq 2$, deci $\operatorname{tr} A=a=0=b=\operatorname{tr} B$ şi $\operatorname{tr} A^n=\operatorname{tr} B^n, \forall n\geq 2$ **1p**

Dacă $d\neq 0$, atunci $a=b$ şi $C^2=aC-a^2I_2$, $C^3=-a^3I_2$, de unde $C^{3k}=(-a^3)^kI_2$, $C^{3k-2}=(-a^3)^{k-1}C$, $C^{3k-1}=(-a^3)^{k-1}(aC-a^2I_2), \forall C\in\{A,B\}, \forall k\geq 1$ **1p**

b) Pentru $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ avem $AB=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$, $B^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$ şi $\operatorname{tr} A^n=\operatorname{tr} B^n=2, \forall n\geq 1$ **2p**

Problema 4. Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$ $(n\geq 2)$ cu $\det A=0$ şi A^* adjuncta sa. Arătaţi că $\left(A^*\right)^2=(\operatorname{tr}A^*)A^*$, unde $\operatorname{tr}A^*$ este urma matricei A^*.

(Se poate folosi faptul că $\operatorname{rang}(XY)\geq\operatorname{rang}(X)+\operatorname{rang}(Y)-n, \forall X,Y\in M_n(\mathbb{C})$.)

Soluţie. Deoarece $\det A=0$, avem $\operatorname{rang}(A)\leq n-1$. Dacă $\operatorname{rang}(A)\leq n-2$, atunci $A^*=O_n$ şi evident $\left(A^*\right)^2=O_n \quad (*)$ **1p**

Dacă $\operatorname{rang}(A)=n-1$, din $AA^*=\left(\det A\right)I_n=O_n$ rezultă $0\geq\operatorname{rang}(A)+\operatorname{rang}(A^*)-n$, prin urmare $\operatorname{rang}(A^*)\leq 1$ **1p**

Dacă $\operatorname{rang}(A^*)=0$, atunci $A^*=O_n$ şi $\left(A^*\right)^2=O_n \quad (**)$ **1p**

Pentru $\operatorname{rang}(A^*)=1$, din faptul că oricare două linii ale matricei A^* sunt proporţionale rezultă $A^*=BC$ cu $B=\begin{pmatrix}b_1&0&\dots&0\\b_2&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_n&0&\dots&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}c_1&c_2&\dots&c_n\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}$ **1p**

$\left(A^*\right)^2=(BC)(BC)=B(CB)C=BDC$, cu $D=\begin{pmatrix}t&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}$, cu $t=\sum\limits_{i=1}^{n}b_ic_i=\operatorname{tr} A^*$ .. **1p**

Obţinem $BDC=tA^* \quad (***)$ **1p**

Relaţiile (*), (**), (***) se exprimă unitar $\left(A^*\right)^2=(\operatorname{tr} A^*)A^*$ **1p**