**Olimpiada Naţională de Matematică**
**Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017**
**CLASA a XII-a — Soluţii şi barem orientativ**

**Problema 1.** Fie $f$, $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue, astfel încât $f(x)g(x) \geq 4x^2$, oricare ar fi $x \in [0,1]$. Arătaţi că cel puţin unul dintre numerele

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|, \quad \left|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

este mai mare sau egal cu 1.

Gazeta Matematică

**Soluţie.** Funcţiile $f$ şi $g$ nu se anulează pe intervalul $(0,1]$, deci au semn constant pe acest interval. **1 punct**
Rezultă că $\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$ şi $\left|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_0^1 |g(x)|\,\mathrm{d}x$,
....................................................................................... **1 punct**
deci

$$1 = \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \sqrt{f(x)g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{|f(x)||g(x)|}\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \int_0^1 \frac{|f(x)|+|g(x)|}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |g(x)|\,\mathrm{d}x\right).$$

....................................................................................... **4 puncte**
Prin urmare, cel puţin unul dintre numerele $\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|$, $\left|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right|$ este mai mare sau egal cu 1. **1 punct**

**Problema 2.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi fie $m$ şi $n$ două numere naturale nenule, prime între ele. Arătaţi că, dacă funcţiile $f\colon G \to G$, $f(x) = x^{m+1}$, şi $g\colon G \to G$, $g(x) = x^{n+1}$, sunt endomorfisme surjective, atunci grupul $G$ este comutativ.

**Soluţie.** Întrucât $f$ este morfism, $(xy)^{m+1} = x^{m+1}y^{m+1}$, adică, $(yx)^m = x^m y^m$, oricare ar fi $x$ şi $y$ din $G$. ....................................................................................... **1 punct**
Cum $y^{m+1}x^{m+1} = (yx)^{m+1} = (yx)^m(yx) = (x^m y^m)(yx) = x^m y^{m+1} x$, rezultă $y^{m+1}x^m = x^m y^{m+1}$. .. **1 punct**
Deoarece $f$ este surjectiv, ultima relaţie arată că $x^m$ este în centrul lui $G$. În mod analog, şi $x^n$ este în centrul lui $G$. ....................................................................................... **3 puncte**
Întrucât $m$ şi $n$ sunt coprime, rezultă că orice element din $G$ este în centrul lui $G$, deci $G$ este comutativ. ....................................................................................... **2 puncte**

**Problema 3.** Determinaţi cel mai mic număr real $a$, care îndeplineşte condiţia

$$a \geq \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(a_1 + \cdots + a_k),$$

oricare ar fi numărul natural nenul $n$ şi oricare ar fi numerele reale strict pozitive $a_1, \ldots, a_n$, a căror sumă este cel mult $\pi$.

**Soluţie.** Minimumul cerut este 1. Fie $n$ un număr natural nenul, fie $a_1, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive, astfel încât $a_1 + \cdots + a_n \le \pi$, şi fie

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(a_1 + \cdots + a_k).$$

Dacă $a_1 \ge \pi/2$, atunci $S \le 0$. ........................................................ **1 punct**

Dacă $a_1 < \pi/2$, fie $p$ cel mai mare indice pentru care $a_1 + \cdots + a_p < \pi/2$. Atunci $S \le \sum_{k=1}^{p} a_k \cos(a_1 + \cdots + a_k) \le \int_0^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x = 1$, deoarece ultima sumă reprezintă suma Darboux inferioară a restricţiei funcţiei cosinus la intervalul $[0, \pi/2]$, corespunzătoare diviziunii $0 < a_1 < a_1 + a_2 < \cdots < a_1 + \cdots + a_p < \pi/2$. Deci toate sumele $S$ sunt mai mici sau egale cu 1.
........................................................................................ **4 puncte**

Pentru fiecare număr natural nenul $n$, alegem $a_1 = \cdots = a_n = \pi/(2n)$. Cum $a_1 + \cdots + a_n = \pi/2$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(a_1 + \cdots + a_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n} = \int_0^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x = 1,$$

rezultă că 1 este cel mai mic număr real care îndeplineşte condiţia din enunţ.
........................................................................................ **2 puncte**

**Problema 4.** Fie $(A, +, \cdot)$ un inel care îndeplineşte simultan următoarele două condiţii:
**(1)** $A$ nu este corp;
**(2)** $x^2 = x$, oricare ar fi elementul neinversabil $x$ din $A$.
Arătaţi că:

**(a)** $a + x$ este neinversabil, oricare ar fi $a$ şi $x$ din $A$, $a$ inversabil şi $x$ nenul şi neinversabil;
**(b)** $x^2 = x$, oricare ar fi $x$ din $A$.

**Soluţie. (a)** Fie $D$ mulţimea elementelor nenule şi neinversabile din $A$; evident, $D$ nu este vidă. Dacă $x$ este un element din $D$, atunci şi $-x$ este în $D$ şi $x = x^2 = (-x)^2 = -x$, deci $2x = 0$. ..... **1 punct**
Rezultă că $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 + x$, deci $1 + x$ este neinversabil (în caz contrar, $1 + x = 1$, deci $x = 0$ şi am obţine o contradicţie). ............................................. **1 punct**

Fie $a$ un element inversabil din $A$ şi fie $x$ un element din $D$. Atunci $ax$ şi $1 + ax$ sunt în $D$, deci $a + x = a^{-1}(1 + ax)$ este şi el în $D$. ............................................. **1 punct**

**(b)** Fie $x$ un element din $D$ şi fie $y$ un element din $A$. Cum $x(xy) = x^2y = xy$ şi $(yx)x = yx^2 = yx$, rezultă că $xy$ şi $yx$ sunt neinversabile (în oricare dintre cazurile contrare, ar rezulta $x = 1$, contradicţie). ............................................................ **1 punct**

Fie $a$ un element inversabil din $A$ şi fie $x$ un element din $D$. Atunci $x + ax$ şi $x + xa$ sunt neinversabile, deci $(x + ax)^2 = x + ax$ şi $(x + xa)^2 = x + xa$. Dezvoltând pătratele, obţinem $x^2 + xax + ax^2 + (ax)^2 = x + ax$ şi $x^2 + x^2a + xax + (xa)^2 = x + xa$, de unde $ax = xax = xa$. ...**2 puncte**
Cum $a + x$ este neinversabil, $(a + x)^2 = a + x$, deci $a^2 = a$. Prin urmare, $x^2 = x$, oricare ar fi $x$ din $A$. ........................................................................ **1 punct**