Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{6}{5}$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-(2m+3)x+m^2+3m+2=0$. Arătați că $(x_1-x_2)^2=1$, pentru orice număr real m.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-3}=5-x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P, mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Demonstrați că $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$.

5p **6.** Determinați numerele reale x, știind că $\sin 2x=\cos x$ și $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\x+ay+3z=2\\x+3y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numerele reale m pentru care $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-5xy+10x+10y-18$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2-5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele naturale n, știind că $(n*n)*n=n$.

5p **c)** Arătați că, dacă $a*a=b$ și $b*b=a$, atunci $a=b=2$ sau $a=b=\frac{9}{5}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\frac{1}{e^2}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real a, $a\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ și, pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **b)** Demonstrați că $I_n\le\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}=$	**2p**
	$=\frac{4+4i+i^2+4-4i+i^2}{2^2-i^2}=\frac{6}{5}$	**3p**
2.	$x_1+x_2=2m+3$, $x_1x_2=m^2+3m+2$	**2p**
	$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4m^2+12m+9-4m^2-12m-8=1$, pentru orice număr real m	**3p**
3.	$\sqrt{x-3}=5-x\Rightarrow x-3=(5-x)^2$, deci $x^2-11x+28=0$	**3p**
	$x=7$, care nu verifică ecuaţia, sau $x=4$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri	**2p**
	Cifra unităţilor se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4\cdot 3=48$ de numere	**3p**
5.	$MP \parallel BC$, $NP \parallel AB$	**2p**
	$BNPM$ paralelogram, deci $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x=\cos x \Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \cos x=0$ sau $\sin x=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, obţinem $x=\frac{\pi}{2}$ sau $x=\frac{5\pi}{6}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{vmatrix}=a^2+3+3-a-9-a=$	**3p**
	$=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(m)A(2-m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&m&3\\1&3&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2-m&3\\1&3&2-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6-m&6-m\\m+4&-m^2+2m+10&7\\m+4&7&-m^2+2m+10\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(2-m)A(m)=\begin{pmatrix}3&m+4&m+4\\6-m&-m^2+2m+10&7\\6-m&7&-m^2+2m+10\end{pmatrix}$, de unde obţinem $m=1$	**3p**

c)	Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq 3$; pentru fiecare număr întreg a, $a \neq -1$ și $a \neq 3$, soluția sistemului este de forma $\left(\frac{a-1}{a+1}, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)$	**3p**
	Cum $a \in \mathbb{Z}$, obținem $\frac{a-1}{a+1}, \frac{1}{a+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a+1$ este divizor al lui 1, deci $a=-2$ sau $a=0$	**2p**
2.a)	$x * y = -5xy + 10x + 10y - 20 + 2 =$	**2p**
	$= -5x(y-2) + 10(y-2) + 2 = 2 - 5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$n * n = 2 - 5(n-2)^2$, $(n * n) * n = 2 + 25(n-2)^3$	**3p**
	$2 + 25(n-2)^3 = n \Leftrightarrow (n-2)\left(25(n-2)^2 - 1\right) = 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 2$	**2p**
c)	$a * a = b \Leftrightarrow b - 2 = -5(a-2)^2$	**1p**
	$b * b = a \Leftrightarrow a - 2 = -5(b-2)^2$, deci $a - 2 = -125(a-2)^4$	**2p**
	$a - 2 = 0$, de unde $a = b = 2$ sau $a - 2 = -\frac{1}{5}$, de unde $a = b = \frac{9}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$x \in (-\infty, -2] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty, -2]$	**1p**
	$x \in [-2, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-2, +\infty)$	**1p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$	**1p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x)\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+2x+2}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{-2x-2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{x^2+2x+2}{-2x-2}}\right)^{\frac{-2x-2}{x^2+2x+2} \cdot x} =$	**2p**
	$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+2}} = \frac{1}{e^2}$	**2p**
c)	$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - a$ este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $g'(x) = f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci g este strict descrescătoare pe $(-\infty, -2)$ și strict crescătoare pe $(-2, +\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1 - a > 0$, $g(-2) = -\sqrt{2} - a < 0$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1 - a > 0$, pentru orice $a \in \left(-\sqrt{2}, -1\right)$, ecuaţia $f(x) = a$ are exact două soluţii reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\sqrt{x+1}\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= 2\sqrt{2} - 2 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$	**2p**
b)	$x \in [0,1] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$ și $x^n \geq 0$, deci $\frac{x^n}{\sqrt{x+1}} \leq x^n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1 = \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

c)	$I_n = 2\int_0^1 x^n \left(\sqrt{x+1}\right)' dx = 2x^n\left(\sqrt{x+1}\right)\Big\|_0^1 - 2n\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{x+1}\,dx = 2\sqrt{2} - 2n\int_0^1 x^{n-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}dx =$	**3p**
	$= 2\sqrt{2} - 2n\int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{2} - 2nI_n - 2nI_{n-1} \Rightarrow (2n+1)I_n = 2\sqrt{2} - 2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, știind că $2z+\overline{z}=6+i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-5$. Calculați $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x+3)=1+\log_2(x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(5,5)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $C(-2,6)$ şi este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=3\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle ACB)=30^\circ$ şi $m(\sphericalangle BAC)=45^\circ$. Determinați lungimea laturii BC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $A(1)-A(0)$.

5p **b)** Arătați că $\det(A(x))=(x-2)(x-3)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a))\leq\det(A(x))$, pentru orice număr real x.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=4xy-4x-4y+5$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=4(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $N=2016\circ 2017$ este pătratul unui număr natural.

5p **c)** Determinați numerele naturale a și b pentru care $a\circ b=13$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x(2\ln x+1)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $1+2ef(x)\geq 0$, pentru orice număr real x, $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=-\frac{1}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x+a)e^x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx\leq-\frac{1}{20}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(a+ib)+(a-ib)=6+i \Leftrightarrow 3a+ib=6+i$, unde $z=a+ib$ şi $a,b\in\mathbb{R}$	**2p**
	$a=2$, $b=1$, deci $z=2+i$	**3p**
2.	$f(1)+f(2)+\ldots+f(10)=(4\cdot1-5)+(4\cdot2-5)+\ldots+(4\cdot10-5)=4(1+2+\ldots+10)-10\cdot5=$	**3p**
	$=220-50=170$	**2p**
3.	$\log_2(x+3)=\log_2 2+\log_2(x+1)\Rightarrow x+3=2(x+1)$	**3p**
	$x=1$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere cu cifrele egale, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**1p**
5.	$m_{AB}=1\Rightarrow m_d=-1$, unde d este dreapta care trece prin C și este perpendiculară pe AB	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y=-x+4$	**3p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}\Rightarrow BC=\dfrac{3\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=$	**2p**
	$=\dfrac{3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\4&9&1\end{pmatrix}$, $A(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&0\\4&9&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(1)-A(0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=3x^2+18+4x-12-9x-2x^2=$	**3p**
	$=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\det(A(x))=x^2-5x+6=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$	**2p**
	Valoarea minimă se obține pentru $a=\dfrac{5}{2}$	**3p**

2.a)	$x \circ y = 4xy - 4x - 4y + 4 + 1 =$	**2p**
	$= 4x(y-1) - 4(y-1) + 1 = 4(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$N = 4(2016-1)(2017-1) + 1 = 4 \cdot 2015 \cdot 2016 + 1 =$	**2p**
	$= 4 \cdot 2015 \cdot (2015+1) + 1 = 4 \cdot 2015^2 + 4 \cdot 2015 + 1 = (2 \cdot 2015 + 1)^2 = 4031^2$	**3p**
c)	$a \circ b = 13 \Leftrightarrow 4(a-1)(b-1) + 1 = 13 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 3$	**2p**
	Cum a și b sunt numere naturale, obținem $a = 2$, $b = 4$ sau $a = 4$, $b = 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} =$	**3p**
	$= 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$f(1) = 0$, $f'(1) = 1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = x - 1$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$	**1p**
	$x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right] \Rightarrow f'(x) \le 0$, deci f descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$	**1p**
	$x \in \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right) \Rightarrow f'(x) \ge 0$, deci f crescătoare pe $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$	**1p**
	Cum $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$, obținem $f(x) \ge -\frac{1}{2e} \Leftrightarrow 1 + 2ef(x) \ge 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x) e^{-x} dx = \int_0^1 (x-1) e^x e^{-x} dx = \int_0^1 (x-1) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$F'(x) = (x + a + 1) e^x$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x) = f(x) \Rightarrow (x + a + 1) e^x = (x - 1) e^x$ pentru orice număr real x, de unde obținem $a = -2$	**3p**
c)	$x^3 f(x) = (x^4 - x^3) e^x$ și, cum $x \in [0,1] \Rightarrow 1 \le e^x$ și $x^4 - x^3 \le 0$, obținem $x^3 f(x) \le x^4 - x^3$	**3p**
	$\int_0^1 x^3 f(x) dx \le \int_0^1 (x^4 - x^3) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}\right)\Big\|_0^1 = -\frac{1}{20}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=20$.
5p	**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x$. Calculați $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $8^x=4^{2x+1}$.
5p	**4.** După o scumpire cu 25%, prețul unui obiect este 250 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de scumpire.
5p	**5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$, $B(1,1)$ şi $C(5,5)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
5p	**6.** Arătați că $\sin 60°+\operatorname{tg}45°=\cos 30°+\operatorname{ctg}45°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 2 \\ x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(3)\right)=3$.
5p	**b)** Arătați că $A(2017+x)+A(2017-x)=2A(2017)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numerele reale m pentru care $\det\left(A(2)+mA(1)\right)=0$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=2xy+6x+6y+15$.
5p	**a)** Arătați că $x*y=2(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x şi y.
5p	**b)** Arătați că $7*98=2017$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x, pentru care $x*(x+2)=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-2}$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstraţi că funcția f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\ln x$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln x$.
5p	**a)** Calculaţi $\int\limits_1^e\left(f(x)-\ln x\right)dx$.
5p	**b)** Arătaţi că F este o primitivă a funcției f.
5p	**c)** Arătați că $\int\limits_1^e f(x)F(x)\,dx=\dfrac{e^2}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(2+\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3}$	**2p**
	$\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=13-4\sqrt{3}\Rightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3}+13-4\sqrt{3}=20$	**3p**
2.	$f(3)=0$	**3p**
	$f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)=0$	**2p**
3.	$2^{3x}=2^{4x+2}\Leftrightarrow 3x=4x+2$	**3p**
	$x=-2$	**2p**
4.	$p+\frac{25}{100}\cdot p=250$, unde p este preţul obiectului înainte de scumpire	**2p**
	$p=200$ de lei	**3p**
5.	$AB=4$	**2p**
	$AC=4\Rightarrow AB=AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	**3p**
6.	$\sin 60°=\cos 30°$	**2p**
	$\operatorname{tg} 45°=\operatorname{ctg} 45°\Rightarrow\sin 60°+\operatorname{tg} 45°=\cos 30°+\operatorname{ctg} 45°$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(3)=\begin{pmatrix}3&2\\3&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(3))=\begin{vmatrix}3&2\\3&3\end{vmatrix}=3\cdot3-3\cdot2=$	**3p**
	$=9-6=3$	**2p**
b)	$A(2017+x)+A(2017-x)=\begin{pmatrix}2017+x&2\\2017+x&2017+x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2017-x&2\\2017-x&2017-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4034&4\\4034&4034\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}2017&2\\2017&2017\end{pmatrix}=2A(2017)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(2)+mA(1)=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m&2m\\m&m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+m&2+2m\\2+m&2+m\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2)+mA(1)\right)=-m(m+2)$	**3p**
	$m(m+2)=0\Leftrightarrow m=-2$ sau $m=0$	**2p**
2.a)	$x*y=2xy+6x+6y+18-3=$	**2p**
	$=2x(y+3)+6(y+3)-3=2(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**
b)	$7*98=2(7+3)(98+3)-3=2\cdot10\cdot101-3=$	**3p**
	$=2020-3=2017$	**2p**
c)	$2(x+3)(x+2+3)-3=3\Leftrightarrow x^2+8x+12=0$	**3p**
	$x=-6$ sau $x=-2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$	**2p**
	$f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)\Rightarrow f'(3)=0$, deci $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x-2)}\right)=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)=1$, deci dreapta de ecuație $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{2}{(x-2)^3}$, $x\in(2,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^e(f(x)-\ln x)dx=\int_1^e 1\,dx=x\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=e-1$	**2p**
b)	F este derivabilă și $F'(x)=(x\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\ln x+1=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\int_1^e f(x)F(x)dx=\frac{1}{2}F^2(x)\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}F^2(e)-\frac{1}{2}F^2(1)=\frac{e^2}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017

Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1+a_2+a_3+a_4=14$ şi $a_1=2$.
5p	**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+4$. Determinaţi distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x+2}+2^{x+1}+2^x=7$.
5p	**4.** După două creşteri succesive cu câte 10%, un produs costă 242 de lei. Calculați prețul produsului înainte de cele două scumpiri.
5p	**5.** Determinați numărul real m pentru care vectorii $\vec{v_1}=m\vec{i}+6\vec{j}$ și $\vec{v_2}=2\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Calculați aria dreptunghiului $ABCD$, știind că $AB=3$ și $AC=5$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=x+y-xy$.
5p	**1.** Calculaţi $(-1)*1$.
5p	**2.** Verificați dacă legea de compoziţie „*” este comutativă.
5p	**3.** Arătaţi că $x*y=-(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**4.** Determinați numerele reale x, pentru care $x*x=0$.
5p	**5.** Determinați numărul real a, pentru care $a*a\geq 1$.
5p	**6.** Calculați $\frac{1}{2016}*\frac{2}{2016}*\frac{3}{2016}*\ldots*\frac{2017}{2016}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde n este număr întreg.
5p	**1.** Calculați $\det(A(2017))$.
5p	**2.** Arătaţi că $A(-2017)+A(2017)=2I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**3.** Arătaţi că $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$, pentru orice numere întregi m și n.
5p	**4.** Se consideră matricea $B=A(0)+A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5)+A(6)$. Arătați că suma elementelor matricei B este divizibilă cu 7.
5p	**5.** Arătați că matricea $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr întreg n.
5p	**6.** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care $A(2017)\cdot X=A(2018)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+(a_1+r)+(a_1+2r)+(a_1+3r)=14 \Leftrightarrow 4a_1+6r=14$	**3p**
	$r=1$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=4$, deci distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox este egală cu 3	**3p**
3.	$2^x\left(2^2+2^1+1\right)=7 \Leftrightarrow 2^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	$\left(p+\frac{10}{100}\cdot p\right)+\frac{10}{100}\cdot\left(p+\frac{10}{100}\cdot p\right)=242$, unde p este prețul produsului înainte de cele două scumpiri	**3p**
	$p=200$ de lei	**2p**
5.	$\frac{m}{2}=\frac{6}{3}$	**3p**
	$m=4$	**2p**
6.	$BC=\sqrt{5^2-3^2}=4$	**3p**
	$\mathcal{A}_{ABCD}=3\cdot 4=12$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$(-1)*1=-1+1-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=1$	**2p**
2.	$x*y=x+y-xy=y+x-yx=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea „$*$” este comutativă	**2p**
3.	$x*y=-xy+x+y-1+1=$	**2p**
	$=-x(y-1)+(y-1)+1=-(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
4.	$-(x-1)(x-1)+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=1$	**3p**
	$x=0$ sau $x=2$	**2p**
5.	$-(a-1)(a-1)+1\geq 1 \Leftrightarrow (a-1)^2\leq 0$	**3p**
	$a=1$	**2p**
6.	$x*1=1*y=1$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$\left(\left(\frac{1}{2016}*\frac{2}{2016}*\frac{3}{2016}*\ldots*\frac{2015}{2016}\right)*\frac{2016}{2016}\right)*\frac{2017}{2016}=1*\frac{2017}{2016}=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$A(2017)=\begin{pmatrix}1 & 2017\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(2017)\right)=\begin{vmatrix}1 & 2017\\ 0 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1$	**3p**
2.	$A(-2017)+A(2017)=\begin{pmatrix}1 & -2017\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2017\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2I_2$	**2p**
3.	$A(m)\cdot A(n)=\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n+m\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1 & m+n\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A(m+n)$, pentru orice numere întregi m și n	**2p**
4.	$B=A(0)+A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5)+A(6)=\begin{pmatrix}7 & 0+1+2+\ldots+6\\ 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 21\\ 0 & 7\end{pmatrix}$	**3p**
	Suma elementelor matricei B este egală cu 35, care este un număr divizibil cu 7	**2p**
5.	$\det\left(A(n)\right)=\begin{vmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$	**2p**
	$\det\left(A(n)\right)\neq 0$, deci $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr întreg n	**3p**
6.	Cum $A(2017)\cdot A(-2017)=A(0)=I_2$, obținem $\left(A(2017)\right)^{-1}=A(-2017)$	**2p**
	$X=\left(A(2017)\right)^{-1}\cdot A(2018)\Leftrightarrow X=A(-2017)\cdot A(2018)\Leftrightarrow X=A(1)\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**