Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=4-i$. Calculați $z\cdot\overline{z}-z-\overline{z}$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că axa Ox este tangentă graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(2m+1)x+m^2-m+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\log_x 5+\log_5(5x)=5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul medianei AM. Demonstrați că $\overrightarrow{BN}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Arătați că, dacă $(\sin x+3\cos y)^2+(\cos x-3\sin y)^2=10$ și $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, atunci $x=y$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x+1 & y+1 & 2\\ x^2+x & y^2+y & 2\end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\Delta(0,2)=-2$.

5p **b)** Arătați că $\Delta(x,y)=(x-1)(y-1)(y-x)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Demonstrați că numărul $\Delta(m,n)$ este divizibil cu 2, pentru orice numere întregi m și n.

2. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 0 & a-1\\ 0 & 1 & 0\\ a-1 & 0 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $A(0)+A(2)$.

5p **b)** Arătați că $A(a)A(b)=A(2ab-a-b+1)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Arătați că $A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x^2+3x+1}{x^3(x+1)^3}$.

5p **a)** Arătați că $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{2n^3}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2-x+a, & x\le 0 \\ \dfrac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1}, & x>0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care funcţia f este continuă în punctul $x=0$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in(-6,-3)$, atunci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin două soluții reale distincte în intervalul $(-3,-1)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z\cdot\overline{z}-z-\overline{z}=(4-i)(4+i)-(4-i)-(4+i)=$	**2p**
	$=4^2-i^2-8=9$	**3p**
2.	$\Delta=(2m+1)^2-4\left(m^2-m+2\right)=8m-7$	**2p**
	Axa Ox este tangentă graficului funcţiei $f \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 8m-7=0 \Leftrightarrow m=\frac{7}{8}$	**3p**
3.	$3\log_x 5+\log_5(5x)=5 \Rightarrow \frac{3}{\log_5 x}+\log_5 5+\log_5 x=5 \Rightarrow (\log_5 x-1)(\log_5 x-3)=0$	**3p**
	$x=5$ sau $x=125$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci numărul cazurilor posibile este egal cu 900	**2p**
	Numerele naturale de trei cifre, care sunt multipli de 11, sunt $10\cdot 11, 11\cdot 11, \ldots, 90\cdot 11$, deci numărul cazurilor favorabile este egal cu 81	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{81}{900}=\frac{9}{100}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$\sin^2 x+6\sin x\cos y+9\cos^2 y+\cos^2 x-6\cos x\sin y+9\sin^2 y=10 \Leftrightarrow 6\sin(x-y)=0$	**3p**
	$x, y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x-y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, deci obţinem $x-y=0$, adică $x=y$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\Delta(0,2)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&2\\0&6&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6+6+0-0-2-12=-2$	**3p**
b)	$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}0&0&1\\x-1&y-1&2\\x^2+x-2&y^2+y-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\x-1&y-1&2\\(x-1)(x+2)&(y-1)(y+2)&2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(x-1)(y-1)\begin{vmatrix}1&1\\x+2&y+2\end{vmatrix}=(x-1)(y-1)(y-x)$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**

c)	$\Delta(m,n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m+1 & n+1 & 2\\ m^2+m & n^2+n & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m+1 & n+1 & 2\\ m(m+1) & n(n+1) & 2\end{vmatrix}$	**1p**
	Cum numerele m şi n sunt întregi, numerele $m(m+1)$ şi $n(n+1)$ sunt divizibile cu 2, deci există numerele întregi k şi l astfel încât $m(m+1)=2k$ şi $n(n+1)=2l$	**2p**
	$\Delta(m,n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m+1 & n+1 & 2\\ 2k & 2l & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m+1 & n+1 & 2\\ k & l & 1\end{vmatrix}$, deci numărul $\Delta(m,n)$ este divizibil cu 2	**2p**
2.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A(2)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(0)+A(2)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}a & 0 & a-1\\ 0 & 1 & 0\\ a-1 & 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 0 & b-1\\ 0 & 1 & 0\\ b-1 & 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2ab-a-b+1 & 0 & 2ab-a-b\\ 0 & 1 & 0\\ 2ab-a-b & 0 & 2ab-a-b+1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2ab-a-b+1 & 0 & (2ab-a-b+1)-1\\ 0 & 1 & 0\\ (2ab-a-b+1)-1 & 0 & 2ab-a-b+1\end{pmatrix}=A(2ab-a-b+1)$, pentru orice numere reale a şi b	**2p**
c)	$A\left(\frac{1}{2}\right)A(a)=A\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot a-\frac{1}{2}-a+1\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru a număr real	**2p**
	$A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=\left(A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=$ $=\left(A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=\ldots=A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{2017}{2}\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+1-x^3}{x^3(x+1)^3}=\dfrac{(x+1)^3-x^3}{x^3(x+1)^3}=$	**3p**
	$=\dfrac{(x+1)^3}{x^3(x+1)^3}-\dfrac{x^3}{x^3(x+1)^3}=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{(x+1)^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{(x+1)^3}\right)=0$	**3p**
	Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**

c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)=1$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)^{2n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{(n+1)^3}\right)^{\frac{(n+1)^3}{-1}}\right)^{\frac{-2n^3}{(n+1)^3}}=$	**2p**
	$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2n^3}{(n+1)^3}}=\frac{1}{e^2}$	**2p**
2.a)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x^2-x+a}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^3}\right)}{x^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^3}\right)=1$	**2p**
b)	f este continuă în $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=f(0)$	**1p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(x^3+3x^2-x+a\right)=a$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\left(e^x+1\right)\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}+e^x+1}=\frac{4}{3}$, $f(0)=a$	**3p**
	$a=\frac{4}{3}$	**1p**
c)	Pentru $a\in(-6,-3)$, avem $f(-3)=3+a<0$, $f(-1)=3+a<0$ și $f(-2)=6+a>0$	**3p**
	Funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$, deci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție reală în intervalul $(-3,-2)$ și cel puțin o soluție reală în intervalul $(-2,-1)$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi numărul real x, ştiind că numerele $x+2$, 7 şi $2x$ sunt în progresie aritmetică.
5p	**2.** Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-2(m-1)x+2m^2-2m=0$. Determinaţi numărul real m, $m\neq 0$, $m\neq 1$ pentru care $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=4$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{2x}=125\cdot 5^{-x}$.
5p	**4.** Determinaţi probabilitatea ca, alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii $M=\{1,2,3,\ldots,10\}$, aceasta să conţină elementul 10.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,3)$ şi $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a pentru care punctele A, B şi C sunt coliniare.
5p	**6.** Arătaţi că $2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x+1=0$, ştiind că $\sin x=\frac{1}{3}$ şi $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}\frac{x+1}{2} & \frac{x-1}{2}\\ \frac{x-1}{2} & \frac{x+1}{2}\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculaţi $\det(A(3))$.
5p	**b)** Demonstraţi că $\det(A(x))\cdot\det(A(y))=\det(A(xy))$, pentru orice numere reale x şi y.
5p	**c)** Demonstraţi că $\det(A(1)+A(2)+\ldots+A(n))=n(\det(A(1))+\det(A(2))+\ldots+\det(A(n)))$, pentru orice număr natural nenul n.
	2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculaţi $A-B$.
5p	**b)** Arătaţi că $(A+I_2)\cdot(B-I_2)=6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Demonstraţi că, dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X\cdot A=A\cdot X$ şi $X\cdot B=B\cdot X$, atunci $X\cdot Y=Y\cdot X$, pentru orice $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+6}{x+1}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Pentru $a=7$, calculaţi $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real a, pentru care dreapta de ecuaţie $y=x+2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că, oricare ar fi numărul real a, funcţia f **nu** admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2mx}{2-x}, & x\in(-\infty,-2)\\ 2x+4-m, & x\in[-2,+\infty)\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Demonstrați că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Pentru $m=1$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=0$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(x+2)+2x=2\cdot 7$	**2p**
	$x=4$	**3p**
2.	$x_1+x_2=2(m-1)$, $x_1x_2=2m^2-2m \Rightarrow x_1^2+x_2^2=-4m+4$	**3p**
	$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=4 \Leftrightarrow -\frac{2}{m}=4$, deci $m=-\frac{1}{2}$	**2p**
3.	$5^{2x}=5^{3-x} \Leftrightarrow 2x=3-x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor cu 2 elemente ale mulțimii M este egal cu C_{10}^2, deci sunt 45 de cazuri posibile	**2p**
	Numărul submulțimilor cu 2 elemente ale mulțimii M, care conțin elementul 10, este egal cu 9, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$	**1p**
5.	$m_{AB}=2$, $m_{BC}=a-3$	**2p**
	$m_{AB}=m_{BC} \Leftrightarrow a=5$	**3p**
6.	$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2 x=1$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $\cos x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	**3p**
	$\operatorname{tg} x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, deci $2\sqrt{2}\operatorname{tg} x+1=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(3)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(3))=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=4-1=3$	**2p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}\frac{x+1}{2}&\frac{x-1}{2}\\\frac{x-1}{2}&\frac{x+1}{2}\end{vmatrix}=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=x$	**2p**
	$\det(A(y))=y$ și $\det(A(xy))=xy$, deci $\det(A(x))\cdot\det(A(y))=\det(A(xy))$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(1)+A(2)+\ldots+A(n)=\begin{pmatrix}\frac{n(n+3)}{4}&\frac{n(n-1)}{4}\\\frac{n(n-1)}{4}&\frac{n(n+3)}{4}\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1)+A(2)+\ldots+A(n))=\frac{n^2(n+1)}{2}=$	**3p**
	$=n\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(1+2+\ldots+n)=n(\det(A(1))+\det(A(2))+\ldots+\det(A(n)))$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

2.a)	$A-B=\begin{pmatrix}1-1 & 3-0\\ 0-2 & 8-1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & 7\end{pmatrix}$	**3p** **2p**
b)	$(A+I_2)\cdot(B-I_2)=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 18 & 0\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$	**2p** **3p**
c)	Pentru $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, cu a, b, c și d numere reale, $X\cdot A=A\cdot X\Rightarrow c=0$ și $3a+7b=3d$ $X\cdot B=B\cdot X\Rightarrow b=0$ și $a=d$, deci $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}=aI_2$ și obținem $X\cdot Y=aY=Y\cdot X$, pentru orice $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+7x+6}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x+6)=$ $=5$	**3p** **2p**
b)	$y=x+2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ și $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-x)=2$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(a-1)x+6}{x+1}=2\Leftrightarrow a=3$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+ax+6}{x+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{a}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}=$ $=+\infty$, deci, oricare ar fi numărul real a, funcția f **nu** admite asimptotă orizontală spre $+\infty$	**2p** **3p**
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\dfrac{2mx}{2-x}=-m$, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}(2x+4-m)=-m$ și $f(-2)=-m$, deci funcția f este continuă în $x=-2$, pentru orice număr real m Cum, pentru orice număr real m, funcția f este continuă pe $(-\infty,-2)$ și pe $(-2,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real m	**3p** **2p**
b)	Pentru $x\in(-\infty,-2)$, $f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x}{2-x}=0\Leftrightarrow x=0\notin(-\infty,-2)$ Pentru $x\in[-2,+\infty)$, $f(x)=0\Leftrightarrow 2x+3=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}\in[-2,+\infty)$	**3p** **2p**
c)	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2mx}{2-x}=-2m$ Cum $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+4-m-2x)=4-m$, obținem $m=-4$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = a_3 - 6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care punctul $A(1,3)$ este situat pe graficul funcției f.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x + 3^{x+2} = 10$.

5p **4.** După o ieftinire cu 15%, prețul unui stilou este de 17 lei. Calculați prețul stiloului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=-x+3$. Determinați numărul real a, știind că dreapta d' de ecuație $y=ax-5$ este perpendiculară pe dreapta d.

5p **6.** Calculaţi aria triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, $\operatorname{tg} B=\frac{3}{4}$ şi $AC=15$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a+1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $D(0)=-12$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $D(a)=a^2$.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(n+1,n)$, unde n este număr natural și $C(1,3)$. Determinați numerele naturale n, știind că punctele A, B și C sunt vârfurile unui triunghi care are aria egală cu 1.

2. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} -1 & x \\ 2 & x-3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(0)+A(2)=2A(1)$.

5p **b)** Demonstraţi că $A(1)\cdot A(x)+3A(1)=O_2$, pentru orice număr real x, unde $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $B=I_2+aA(1)$ este inversabilă, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+5}{x^2+x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to +\infty}\left((2x-1)f(x)\right)$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & x\in(-\infty,0] \\ \sqrt{3x+1}, & x\in(0,+\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Arătați că $f(-2)\cdot f(5)=-28$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x=0$.

5p **c)** Arătați că, dacă p și q sunt numere reale astfel încât $(p+1)\cdot(q+1)<0$, atunci $f(p)\cdot f(q)<0$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Clasa a XI-a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1=(a_1+2r)-6$	**2p**
	$r=3$	**3p**
2.	$f(1)=3 \Leftrightarrow 2+m=3$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$3^x\left(1+3^2\right)=10 \Leftrightarrow 3^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	$p-\frac{15}{100}\cdot p=17$, unde p este prețul stiloului înainte de ieftinire	**2p**
	$p=20$ de lei	**3p**
5.	$m_d=-1$, $m_{d'}=a$	**2p**
	$(-1)\cdot a=-1 \Leftrightarrow a=1$	**3p**
6.	$\frac{AC}{AB}=\frac{3}{4} \Rightarrow AB=20$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{20\cdot 15}{2}=150$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(0)=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+6+2-0-18-2=-12$	**3p**
b)	$D(a)=6a+6(a+1)+2-2a-18-2(a+1)=8a-12$	**2p**
	$a^2-8a+12=0 \Leftrightarrow a=2$ sau $a=6$	**3p**
c)	$\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ n+1 & n & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}D(n) \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\lvert D(n)\rvert=\lvert 2n-3\rvert$	**3p**
	$\lvert 2n-3\rvert=1$, de unde obținem $n=1$ sau $n=2$	**2p**
2.a)	$A(0)+A(2)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 4 & -4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=2A(1)$	**2p**

b)	$A(1)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & x\\ 2 & x-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -6 & 6\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(1)\cdot A(x)+3A(1)=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -6 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 6 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$B=\begin{pmatrix}1-a & a\\ 2a & 1-2a\end{pmatrix}$, deci $\det B=\begin{vmatrix}1-a & a\\ 2a & 1-2a\end{vmatrix}=1-3a$	**3p**
	$1-3a=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$, deci matricea B este inversabilă pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+5}{x^2+x+2}=\frac{-1+5}{(-1)^2+(-1)+2}=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}=2$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left((2x-1)f(x)\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(2x-1)(x+5)}{x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+5}{x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
2.a)	$f(-2)=-7$	**2p**
	$f(5)=4\Rightarrow f(-2)\cdot f(5)=-28$	**3p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x^3+1\right)=1$	**1p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\sqrt{3x+1}\right)=1$	**1p**
	Cum $f(0)=1$, obținem $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, deci funcția f este continuă în punctul $x=0$	**3p**
c)	$f(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ și, cum funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, obținem că funcția f are semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty,-1)$ și $(-1,+\infty)$, și cum $f(-2)<0$ și $f(5)>0$, obținem $f(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,-1)$ și $f(x)>0$ pentru $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
	$(p+1)(q+1)<0\Rightarrow p\in(-\infty,-1)$ și $q\in(-1,+\infty)$ sau $p\in(-1,+\infty)$ și $q\in(-\infty,-1)$, de unde obținem că $f(p)$ și $f(q)$ au semne diferite, deci $f(p)\cdot f(q)<0$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Clasa a XI-a

Simulare

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1,75+\sqrt{\frac{1}{16}}-\frac{2^{2017}}{2^{2016}}=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4$. Determinați numerele reale x pentru care $f(x)=3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+1)=3$.

5p **4.** Determinați numărul pătratelor perfecte din mulțimea $\{1,2,3,\ldots,2017\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $4x-3y+12=0$. Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,a)$ aparține dreptei d.

5p **6.** Calculați perimetrul triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle A)=90°$, $\sin B=\frac{3}{5}$ și $BC=20$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-7x-7y+56$.

5p **1.** Calculați $0*8$.

5p **2.** Arătați că $x*y=(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x și y.

5p **3.** Arătați că $x*7=7$, pentru orice număr real x.

5p **4.** Calculați $0*1*2*\ldots*2017$.

5p **5.** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=8$.

5p **6.** Determinați numerele naturale m și n pentru care $m*n=6$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră $\mathbb{Z}_4=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3}\}$, mulțimea claselor de resturi modulo 4.

5p **1.** Calculați $\hat{0}+\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}$ în $\mathbb{Z}_4$.

5p **2.** Calculați $\hat{2}\cdot\hat{3}$ în $\mathbb{Z}_4$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbb{Z}_4$ ecuația $\hat{2}\cdot x=\hat{0}$.

5p **4.** Determinați simetricul elementului $\hat{1}$ în raport cu operația de adunare în $\mathbb{Z}_4$.

5p **5.** Determinați elementele simetrizabile în raport cu operația de înmulțire în $\mathbb{Z}_4$.

5p **6.** Determinați mulțimea $H=\{x\in\mathbb{Z}_4 \mid x^2=x\}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1,75=\frac{7}{4}$, $\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$, $\frac{2^{2017}}{2^{2016}}=2$	**3p**
	$\frac{7}{4}+\frac{1}{4}-2=2-2=0$	**2p**
2.	$-x^2+4=3 \Leftrightarrow x^2=1$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=1$	**2p**
3.	$x+1=2^3$	**2p**
	$x=7$, care verifică ecuaţia	**3p**
4.	$44^2<2017<45^2$	**2p**
	În mulţimea $\{1,2,3,\dots,2017\}$ sunt 44 de pătrate perfecte	**3p**
5.	$A\in d \Leftrightarrow 4a-3a+12=0$	**3p**
	$a=-12$	**2p**
6.	$\frac{AC}{20}=\frac{3}{5} \Rightarrow AC=12$	**2p**
	$AB=\sqrt{400-144}=16$, de unde obţinem $P_{\Delta ABC}=16+12+20=48$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$0*8=0-0-56+56=$	**3p**
	$=0$	**2p**
2.	$x*y=xy-7x-7y+49+7=$	**2p**
	$=x(y-7)-7(y-7)+7=(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**
3.	$x*7=(x-7)(7-7)+7=$	**3p**
	$=0+7=7$, pentru orice număr real x	**2p**
4.	$7*x=7$, pentru x număr real	**2p**
	$0*1*2*\ldots*2017=((0*1*2*\ldots*6)*7)*8*9*\ldots*2017=7*(8*9*\ldots*2017)=7$	**3p**
5.	$(x-7)(x-7)+7=8 \Leftrightarrow (x-7)^2=1$	**3p**
	$x=6$ sau $x=8$	**2p**
6.	$(m-7)(n-7)+7=6 \Leftrightarrow (m-7)(n-7)=-1$	**3p**
	Cum m şi n sunt numere naturale, obţinem $m=8$, $n=6$ sau $m=6$, $n=8$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\hat{0}+\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=(\hat{0}+\hat{1})+\hat{2}+\hat{3}=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=$	**2p**
	$=(\hat{1}+\hat{2})+\hat{3}=\hat{3}+\hat{3}=\hat{2}$	**3p**

2.	$2\cdot 3=6$ $\hat{2}\cdot\hat{3}=\hat{2}$	**2p** **3p**
3.	$\hat{0}$ şi $\hat{2}$ sunt soluţii ale ecuaţiei Celelalte elemente ale lui $\mathbb{Z}_4$ nu sunt soluţii ale ecuaţiei	**3p** **2p**
4.	$\hat{1}+\hat{3}=\hat{0}$ $\hat{3}+\hat{1}=\hat{0}$, deci $\hat{3}$ este simetricul elementului $\hat{1}$ în raport cu operația de adunare în $\mathbb{Z}_4$	**2p** **3p**
5.	$\hat{a}$ este element simetrizabil în raport cu înmulțirea în $\mathbb{Z}_4 \Leftrightarrow (a,4)=1$ Elementele simetrizabile în raport cu înmulțirea în $\mathbb{Z}_4$ sunt $\hat{1}$ și $\hat{3}$	**3p** **2p**
6.	$\hat{0}^2=\hat{0}$, $\hat{1}^2=\hat{1}$, $\hat{2}^2=\hat{0}$, $\hat{3}^2=\hat{1}$ $H=\{\hat{0},\hat{1}\}$	**3p** **2p**