

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 26. 02. 2017
Clasa a IX- a

1. Demonstrați că:

a) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}, \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x, y > 0;$

b) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \forall x, y, z > 0;$

c) Dacă x, y, z sunt numere reale nenule care verifică relația

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = \frac{35}{x+y+z},$$

atunci x, y, z nu pot avea toate același semn.

2. Determinați valoarea minimă și valoarea maximă a expresiei

$$E(x) = \frac{x}{x^2+2x+2}, \text{ unde } x \text{ este un număr real.}$$

3. Determinați valorile naturale ale lui n pentru care cel puțin două dintre numerele $[\sqrt{n^2+1}], [\sqrt{n^2+5}], [\sqrt{n^2+9}], \dots, [\sqrt{n^2+2017}]$ sunt egale, unde am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x .

4. Fie $ABCD$ un paralelogram în care avem M este mijlocul lui $[BC]$, N este mijlocul lui $[AM]$ și $DN \cap AC = \{P\}$. Calculați raportul $\frac{AP}{PC}$.

¹ Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

² Toate problemele sunt obligatorii;

³ Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.