**Olimpiada Națională de Matematică**
**Etapa locală – 25.02.2017**
**Clasa a IX-a Matematică-Informatică**



1. (7 p) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația :$16\{x\}^2 + 1 = 8x$

2. a) (3 p) Fie $a , b , c \in ( 0 , +\infty )$ *și* $a + b + c = 2017$.
   Să se arate că $\sqrt{ab + ac} + \sqrt{ab + bc} + \sqrt{ac + bc} \leq \frac{6051}{2}$.

   b) (4 p) Demonstrați inegalitatea :

   $$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, (\forall) a, b, c \in R_+^*.$$

3. (7 p) Să se determine șirul de numere strict pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_2 = 3$ și $\forall\, n \geq 2$, $\left(1 - \frac{1}{a_1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{a_{n-1}^2}\right) = \frac{n \cdot a_n}{2 \cdot a_{n-1}^2}$

4. (7 p) În triunghiul ABC considerăm punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{5}$ și $\frac{AN}{NC} = \frac{3}{4}$, fie $P \in (MN)$astfel încât $\frac{MP}{PN} = \frac{2}{7}$. Dacă $AP \cap BC = \{Q\}$, să se determine valoarea raportului $\frac{BQ}{QC}$ .

**Notă:**

*Timp de lucru efectiv : 3 ore .*
*Toate subiectele sunt obligatorii.*
*Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.*

# Olimpiada Națională de Matematică
# Etapa locală – 25.02.2017
# Clasa a X-a Matematică-Informatică



## Problema 1

Pentru orice $a, b \in \boldsymbol{R}, a > 1, b > 1$, arătați că:

$$2\left(\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ab} + \log_b \sqrt[4]{ab}} - \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{b}{a}} + \log_b \sqrt[4]{\frac{a}{b}}}\right)\sqrt{\log_a b} = \begin{cases} 2, & 1 < a \leq b \\ 2\log_a b, & 1 < b < a \end{cases}$$

## Problema 2

Rezolvați, în mulțimea numerelor reale pozitive, ecuația:

$x^{x^{10}} = 10$ .

## Problema 3

Fie $z_1$ și $z_2$ numere complexe distincte, astfel încât $|z_1| = |z_1 + z_2| = |z_2|$.

Calculați valoarea expresiei: $E = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2017} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2017}$ .

## Problema 4

Se consideră funcția $f: R \to R$, care verifică relația:

$f(x^2) + f(x+1) = x(x+1)(x^2 - x - 1) + 1$, pentru $\forall x \in R$.

a) Arătați că funcția $f$ nu este injectivă.
b) Dați un exemplu pentru funcția $f$, care verifică relația dată.

## Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

# Olimpiada Naţională de Matematică
## Etapa locală – 25.02.2017
## Clasa a XI-a Matematică-Informatică



**Problema 1( 7 puncte)**

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir astfel încât $a_0 > 0$ şi $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^2 + a_n + 1}, \forall n \in \mathbf{N}$.

**(3p)** **a)** Să se arate că $(a_n)_{n\in N}$ este strict crescător şi nemărginit.

**(4p)** **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt[3]{n}}$.

**Problema 2** ***(7 puncte )***

Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{2x^2 + mx + 3}{x^2 + mx + 4}$, unde $m \in \mathbb{R}$, iar $D$ este domeniul maxim de definiție al funcției. Determinați valorile parametrului real $m$ pentru care graficul funcției $f$ admite exact două asimptote. Precizați ecuațiile acestor asimptote.

**Problema 3** ***(7 puncte )***

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mihai construieşte noi matrice, plecând de la A astfel: în prima etapă, alege cinci elemente ale lui A, cărora le schimbă semnul. În continuare, poate efectua de oricâte ori doreşte următoarele operaţii: fie adună la o linie elementele unei alte linii, fie adună la o coloană elementele unei alte coloane.

**(5p)** **a)** Arătați că determinantul matricei obținute după prima etapă este 0,4 sau $-4$ .

**(2p)** **b)** Poate Mihai să obțină matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

**Problema 4** ***(7 puncte )***

**(3p)a)** Arătaţi că nu există matrice X, Y $\in$ $M_2(\mathbf{R})$ astfel încât X·Y - Y·X = $I_n$.

**(4p) b)** Dacă A,B $\in$ $M_n(\mathbf{R})$, astfel încât A·B-B·A=B, să se arate că B nu este inversabilă.

**Notă**

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

# Olimpiada Naţională de Matematică
## Etapa locală – 25.02.2017
## Clasa a XII-a Matematică-Informatică

**Problema 1** ***(7 puncte )***

Determinaţi primitivele funcţiei: $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\dfrac{x-arctgx}{\left(1+x^2\right)^2\left(arctgx\right)^3}$.

**Problema 2** ***(7 puncte )***

Se consideră funcțiile $f, g : I \to R$, $I \subseteq R$ interval, două funcții derivabile cu derivate continue.

**(4p)** **a)** Determinați $\int\left[f'(x)+f(x)\cdot g'(x)\right]\cdot e^{g(x)}dx$.

**(3p)** **b)** Folosind eventual punctul a), calculați : $\int\dfrac{x^2\ln x-\ln x+x}{x}\cdot e^{x+\frac{1}{x}}dx$, $x>0$.

**Problema 3** ***(7 puncte )***

Fie G = $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & bi \\ 0 & 0 & 0 \\ bi & 0 & a \end{pmatrix}\middle| a,b\in R, a^2+b^2>0\right\}$.

**(4p)** **a)** Demonstrati ca $(G,\cdot)$ formeaza grup.

**(3p)** **b)** Daca A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$, sa se calculeze $A^{2017}$.

**Problema 4** ***(7 puncte )***

Arătați că grupurile $(R,+)$ și $(R^*,\cdot)$ nu sunt izomorfe.

***Notă***

- *Timp de lucru efectiv 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte*

# Olimpiada Naţională de Matematică
# Etapa locală – 25.02.2017
# Clasa a IX-a M2



**Problema 1** ***(7 puncte )***

Se considera predicatul $p(x)$:$x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$,$x\in R^*$.

a)Stabiliti valoarea de adevar a propozitiei$p(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$. (3p)

b) Stiind ca $a \in R$, pentru care $p(a)$ este adevarata, calculati $a^2+\frac{1}{a^2}$. (4p)

**Problema 2** ***(7 puncte )***

a) Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$,astfel încât
$$2f(x)+3f(1-x)=4x-1,(\forall)x\in\mathbb{R}; \qquad (3p)$$
b) Calculați$f(0)+f(1)+\cdots+f(10)$,unde,$f(x)=\frac{11}{5}-4x,\forall x\in R$. (4p)

**Problema 3** ***(7 puncte )***

3. Suma primilor 13 termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu 130. Dacă presupunem, în plus, că termenii: al patrulea, al zeceleași al șaptelea ai acestei progresii sunt, în această ordine, trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, să se determine primul termen al progresiei aritmetice.

**Problema 4** ***(7 puncte )***

4.Fie triunghiul ABC și M∈(BC), astfel încât $\overrightarrow{MC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$. Să se demonstreze că

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}.$$

***Notă***

- *Timp de lucru efectiv 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte*

# Olimpiada Națională de Matematică
# Etapa locală – 25.02.2017
# Clasa a X-a M2



**Problema 1** ***(7 puncte )***

Aflați $a, b \in Z$ astfel încat $\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} = a + b\sqrt{5}$.

**Problema 2** ***(7 puncte )***

a) Calculați valoarea expresiei:

$E = log_2\left(1-\frac{1}{2^2}\right) + log_2\left(1-\frac{1}{3^2}\right) + log_2\left(1-\frac{1}{4^2}\right) + \cdots .. + log_2\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + log_2(1-\frac{1}{(n+1)^2})$ (4p)

b)Demonstrati ca $E \leq 0, \forall n \geq 1$. (3p)

**Problema 3** ***(7 puncte )***

Fie numerelecomplexe$z_1 = m + i, z_2 = 1 + mi, m \in R$.

a)aratati ca $|z_1| = |z_2|, \forall m \in R$ (2p)

b) pentru m=-2, aratati ca $z_2$estesolutie a ecuatiei$x^2 - 2x + 5 = 0$ (3p)

c) determinati$m \in R$ astfel incat $\frac{z_1}{z_2} \in R$. (2p)

**Problema 4** ***(7 puncte )***

Daca$x \in R$ xu proprietatea $3^x + 3^{-x} = 7$, sa se calculeze:

a) $9^x + 9^{-x}$ (4p)
b) $729^x + 729^{-x}$. (3p)

***Notă***

- *Timp de lucru efectiv 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte*

# Olimpiada Naţională de Matematică
## Etapa locală – 25.02.2017
## Clasa a XI-a M2



**Problema 1** ***(7 puncte )***

In $M_2(R)$ se considera matricea $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ; $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum si submultimea G={ X(a) / a∈R, $X(a) = I_2 + aA$}.

a) Calculati $A^2$;  (2p)
b) Aratati ca X(a)X(b) = X(a+b+ab);  (2p)
c) Aratati ca X(1)·X(2)·…..·X(2016) = X(2017!-1).  (3p)

**Problema 2** ***(7 puncte )***

Fie matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m-4 & -4 \\ -3 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ ∈ $M_3(R)$.

a) Demonstrati ca pentru orice m>3 matricea este inversabila;  (3p)
b) Calculati inversa matricii A(3).  (4p)

**Problema 3** ***(7 puncte )***

Fie functia f:R-{3}→R, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-3}$, a,b,c∈R. Determinati numerele reale a,b,c stiind ca graficul functiei admite asimptota oblica y=x+2 si punctual A(1,1) apartine graficului functiei.

**Problema 4** ***(7 puncte )***

Calculati :

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2-1}-1}{\sin(x-1)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2}.$$

***Notă***

- *Timp de lucru efectiv 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte*

# Olimpiada Naţională de Matematică
## Etapa locală – 25.02.2017
## Clasa a XII-a M2



**Problema 1** ***(7 puncte )***

Fie multimea $M=\left\{M_x \middle| M_x=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & e^x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, x\in R\right\}$.

a) Aratati ca $(M,\cdot)$ este grup; (4p)
b) Calculati $M_x^n$, $n\in N$. (3p)

**Problema 2** ***(7 puncte )***

Pe Z se defineste legea de compozitie "$\circ$" astfel $x\circ y=xy-2x-2y+6$.

a) Aratati ca $x\circ y\circ z=(x-2)(y-2)(z-2)+2$; (1p)
b) Determinati elementele inversabile in raport cu legea "$\circ$"; (3p)
c) Rezolvati ecuatia $\log_2 x\circ\log_4 y=2; x,y>0$. (3p)

**Problema 3** ***(7 puncte )***

Fie functiile $f,F:\left(-\frac{2}{5},\infty\right)\to R,\ f(x)=\sqrt{5x+2}, F(x)=(ax+b)\sqrt{5x+2}$. Determinati numerele reale a,b astfel incat F este o primitiva a lui f.

**Problema 4** ***(7 puncte )***

Fie $I_n=\int_0^1 x^n\cdot e^x dx$, $n\in N^*$.

a) Calculati $I_1$; (2p)
b) Aratati ca $(n+1)I_n+I_{n+1}=e$, $(\forall)n\in N^*$; (2p)
c) Aratati ca $I_n$ este rational numai in cazul n=1 (3p).

***Notă***

- *Timp de lucru efectiv 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte*