MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017
CLASA a IX-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor Mircea Țeca

Să se rezolve ecuația $\left[\left|\frac{4x-1}{4}\right|\right]+\left[\left|\frac{4x+1}{4}\right|\right]=\frac{2x+3}{2}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a, iar $|a|$ reprezintă valoarea absolută a lui a.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Notăm $\frac{2x+3}{2}=n\in\mathbb{N}$, de unde $x=n-\frac{3}{2}$. Ecuația devine $\left[\left|n-\frac{7}{4}\right|\right]+\left[\left|n-\frac{5}{4}\right|\right]=n$.	1
Cazul 1. Dacă $n-\frac{5}{4}<0$ atunci $n\in\{0,1\}$.	1
Pentru $n=0$ ecuația nu se verifică.	1
Pentru $n=1$ ecuația se verifică, de unde o soluție este $x_1=-\frac{1}{2}$.	1
Cazul 2. Dacă $n-\frac{7}{4}<0\le n-\frac{5}{4}$, nu există valori naturale pentru n.	1
Cazul 3. Dacă $0\le n-\frac{7}{4}$ adică $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ ecuația devine $\left[n-\frac{7}{4}\right]+\left[n-\frac{5}{4}\right]=n$, de unde $2(n-2)=n$. Rezultă $n=4$ și implicit $x_2=\frac{5}{2}$.	2
Obs. Pentru cazul 1 se poate rezolva $\left[\frac{7}{4}-n\right]-\left[n-\frac{5}{4}\right]=n$, de unde $1-n-n+2=n$. Pentru cazul 3 se poate aplica relația lui Hermite, dar nu se simplifică semnificativ calculul.	

Enunț subiect 2, autor Benedict G. Niculescu (G.M.11/2016)

Considerăm sistemul $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3-3xyz=1$.

a) Știind că $x,y,z\in\mathbb{R}$, să se arate că $x+y+z=1$.

b) Să se rezolve sistemul în mulțimea $[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$.

c) Să se determine o soluție în mulțimea $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Folosim identitatea $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$	1
$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$ și notăm $S=x+y+z$ și $S'=xy+yz+zx$. Există inegalitatea $S' \le x^2+y^2+z^2$ (1)	1
Sistemul se poate scrie: $\begin{cases} S^2-2S'=1 \\ S\left(S^2-3S'\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S'=\dfrac{S^2-1}{2} \\ S\left(S^2-3S'\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S'=\dfrac{S^2-1}{2} \\ (S-1)^2(S+2)=0 \end{cases}$.	1
Dacă $S=-2$ rezultă $S'=\dfrac{3}{2}$ ceea ce contrazice inegalitatea (1). Deci $S=1$ și implicit $S'=0$.	1
b) Fie o soluție $(x_0,y_0,z_0)\in[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$. Din $S=1$ și $S'=0$ rezultă $x_0+y_0+z_0=1$ și $x_0y_0=y_0z_0=z_0x_0=0$, deci sistemul are doar soluțiile $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\in[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$.	2
c) De exemplu $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$. Obs. Orice triplet care verifică condițiile primește punctajul maxim.	1

Enunț subiect 3, autor (* * *)

Fie M, N, P situate pe laturile $[AB],[BC]$, respectiv $[CA]$ ale triunghiului ABC astfel încât $AM=BN=CP$. Notăm cu T centrul de greutate al triunghiului MNP. Să se arate că dacă $AB\cdot\overrightarrow{AT}+BC\cdot\overrightarrow{BT}+CA\cdot\overrightarrow{CT}=\vec{0}$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Notăm $AM=BN=CP=x$ și notațiile uzuale $BC=a, AC=b, AB=c$. $\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MT}=\dfrac{x}{c}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MT}\Rightarrow c\cdot\overrightarrow{AT}=x\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{MT}$. Analog, $a\cdot\overrightarrow{BT}=x\cdot\overrightarrow{BC}+a\cdot\overrightarrow{NT}$ și $b\cdot\overrightarrow{CT}=x\cdot\overrightarrow{CA}+b\cdot\overrightarrow{PT}$.	1 1
Evident, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.	1
Condiția ca T să fie centrul de greutate al triunghiului MNP este: $\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{NT}+\overrightarrow{PT}=\vec{0}$.	1
Dacă $x\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{MT}+x\cdot\overrightarrow{BC}+a\cdot\overrightarrow{NT}+x\cdot\overrightarrow{CA}+b\cdot\overrightarrow{PT}=\vec{0}$, rezultă	1
$c\cdot\overrightarrow{MT}+a\cdot\overrightarrow{NT}-b\cdot\left(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{NT}\right)=\vec{0}\Rightarrow(c-b)\overrightarrow{MT}=(b-a)\overrightarrow{NT}\Rightarrow a=b=c$.	2

Enunț subiect 4, autor Mircea Țeca

Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit astfel: $a_1=1$ și $a_{n+1}=\left[\frac{a_n}{2}\right]+1009$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

a) Să se arate că $a_n<2018$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se determine a_{131}.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Prin inducție, $a_1=1<2018$, iar dacă $a_k<2018$, deoarece $\left[\frac{a_k}{2}\right]\le\frac{a_k}{2}$ rezultă $a_{k+1}<2018$.	2
b) $a_n\in\mathbb{N}\cap[1,2017]$ și $a_{n+1}=\left[\frac{a_n}{2}+1009\right]=\left[\frac{a_n+2018}{2}\right]\ge\left[\frac{2a_n}{2}\right]=a_n$ (șir mărginit și crescător de numere naturale).	1
Cazul 1. Dacă $a_n=2017$ rezultă $a_{n+1}=2017$.	1
Cazul 2. Dacă $a_n\le 2016$ rezultă $a_{n+1}=\left[\frac{a_n+2018}{2}\right]\ge\left[\frac{2a_n+2}{2}\right]=a_n+1$, de unde $a_n\ge a_p+n-p$, $\forall n\ge p$, $n,p\in\mathbb{N}^*$.	1
Deoarece $a_2=1009$, $a_3=1513$, $a_4=1765$, $a_5=1891$.	1
Presupunem $a_{131}\le 2016$. Atunci $a_{131}\ge a_5+131-5=1891+131-5=2017$ contradicție. Rezultă $a_{131}=2017$.	1

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017
CLASA a X-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1

Fie $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+d=b+c$ iar numerele $d-b$ și $d-c$ au același semn.

Să se determine $z \in \mathbb{C}$ știind că $|z|=1$ și $|az+d| \le |bz+c|$.

Autor: prelucrare prof. *Eugen Radu*, București

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Ridicând la pătrat obținem $a^2+d^2+ad(z+\bar{z}) \le b^2+c^2+bc(z+\bar{z})$ și $a^2+d^2+2ad=b^2+c^2+2bc$	**2p**
Prin scădere obținem $(z+\bar{z}-2)(ad-bc) \le 0$	**2p**
Însă $ad-bc<0$	**1p**
Deducem $z+\bar{z}-2 \ge 0$ (1)	**1p**
Luând $z=x+iy$, obținem din (1) $x \ge 1$ concomitent cu $x^2+y^2=1$ La final: $x=1$; $y=0$; $z=1$	**1p**

Subiectul 2

a) Să se arate că funcția $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$ este injectivă.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{y-3}-\sqrt{y-5} \\ \sqrt[3]{2x-1}-\sqrt{y-1}=-1 \end{cases}$

Autor: prelucrare prof. *Eugen Radu*, București

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$ este strict descrescătoare, deci injectivă	**2p**
b) Prima ecuație se scrie $f(x-1)=f(y-5)$, $x \ge 1$, $y \ge 5$	**1p**
Deducem din a) că $y=x+4$ și ecuația $\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt{x+3}=-1$	**1p**

Din $\sqrt[3]{2x-1}=a$ și $\sqrt{x+3}=b$ obținem echivalent sistemul $\begin{cases} a-b=-1 \\ a^3-2b^2=-7 \end{cases}, b\geq 0$	1p
Deducem succesiv: $b=a+1$; $a^3-2a^2-4a+5=0$; $(a-1)(a^2-a-5)=0$. De aici $a=1$; $a=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$; $x=1, y=5$; $x=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3\right), y=\frac{1}{2}\left(9+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3\right)$	2p

Subiectul 3

a) Arătați că $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$, pentru orice numere reale $a,b,c>0$, $b\neq 1$.

b) Rezolvați ecuația $5^{\log_{2008} x}+2008^{\log_x 5}=10$, $x\in\mathbb{R}$.

Autor: *Sorin Antohi*, Gazeta Matematică 5/2016

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Logaritmând, relația se reduce la $\log_b c \log_b a=\log_b a \log_b c$	**2p**
b) Ecuația se scrie echivalent $5^t+5^{\frac{1}{t}}=10$, unde $t=\log_{2008} x$	**2p**
Dar $5^t+5^{\frac{1}{t}}\geq 2\cdot\sqrt{5^{t+\frac{1}{t}}}$ și $t+\frac{1}{t}\geq 2$ pentru $t>0$, deci în acest caz egalitatea se realizează doar pentru $t=1 \Leftrightarrow x=2008$	**2p**
Pentru $t<0$, $5^t+5^{\frac{1}{t}}<2$, deci în acest caz nu avem soluții	**1p**

Subiectul 4

Să se determine funcțiile $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $g(\{x\}-4[x]+[3x])=x-2[x]$, $\forall x\in\mathbb{R}$, unde $\{\cdot\}$ reprezintă partea fracționară, iar $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă.

Autor: prof. *Eugen Radu*, București

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\{x\}-4[x]+[3x]$ Avem $(f\circ f)(x)=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$	**3p**
Deducem: $g(f(x))=x-2[x]$ și înlocuind x prin $f(x)$ obținem $g(x)=f(x)-2[f(x)]$	**2p**
La final: $g(x)=x+3[x]-[3x]$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$	**2p**

GUVERNUL ROMÂNIEI — MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE — SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA — I.S.M.B. INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017
CLASA a 11-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor *Florin Rotaru*, Focșani, GMB 11/2016.

Fie șirul $(x_n)_{n\ge 1}$, cu $x_1>0$ și $x_1+x_2+\dots+x_n=\ln x_{n+1}$, $n\ge 1$.

a) Să se arate că $e^x>2^{[x]}\ge x$, $\forall x>0$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Reiese imediat din $e>2$ și inegalitatea Bernoulli	2p
b) $x_2=e^{x_1}>x_1$, $x_{n+1}>x_n$ (inducție)	1p
$x_{n+1}=e^{x_1+x_2+\dots x_n}>e^{nx_1}$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$	2p
c) $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{e^{x_1+x_2+\dots x_n}}{e^{x_1+x_2+\dots x_{n-1}}}=e^{x_n}$, deci $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}=e$	2p

Enunț subiect 2, autor *Adrian Troie*, București

Fie $A\in M_2(R)$ astfel încât $A^2\ne O_2$ și există $x,y\in R$ cu proprietatea că $A^2-xA+yI_2=O_2$ și $A^4-x^2A^2+y^2I_2=O_2$. Arătați că urma matricei A este x sau $2x$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Din prima relație reiese $A^4=x^2A^2-2xyA+y^2I_2$, iar din a doua $y(xA-yI_2)=O_2$	1p
Dacă $y\ne 0$, atunci $xA=yI_2$; pentru $x=0$ obținem $y=0$, fals, iar pentru $x\ne 0$ reiese $A=\dfrac{y}{x}I_2$, deci $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 I_2-\dfrac{y}{x}xI_2+yI_2=O_2$, care duce la $y=0$, imposibil. Așadar $y=0$, de unde $A^2=xA$, $x\ne 0$	3p
$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ și $A^2=xA$ dă fie $a+d=TrA=x$, fie $a+d\ne x$, caz în care $b=c=0$ și $a=d\in\{0,x\}$; cum $a=d=0$ este imposibil, rămâne $a=d=x$ deci Tr(A) = 2x	3p

Enunț subiect 3, autor *Adrian Troie*, București

Fie șirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1, y_1 > 0$, care verifică relațiile de recurență

$$x_{n+1} = x_n\left(1+\frac{1}{y_n}\right),\ y_{n+1} = y_n\left(1+\frac{1}{x_n}\right),\ \forall n \geq 1.$$

a) Să se arate că cele două șiruri nu pot fi simultan convergente.

b) Să se arate că dacă $x_1 < y_1$ atunci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ e convergent, iar șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$

c) Să se determine termenii generali ai șirurilor date dacă ambele șiruri au limita $+\infty$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a)Dacă a, b sunt limitele șirurilor, atunci $a, b > 0$, $a = a\left(1+\frac{1}{b}\right)$, deci $\frac{1}{b} = 0$, imposibil	**1p**
b) $y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}-x_n} \Rightarrow \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{1+x_{n+1}}{1+x_n} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_2}{1+x_1}(1+x_n) \Rightarrow x_n = C_1 + C_2 r^n$ $r = \frac{x_2}{1+x_1} = \frac{x_1(y_1+1)}{y_1(x_1+1)} < 1 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ e convergent.	**3p**
Șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ e strict crescător și nu poate fi convergent, deci are limita $+\infty$	**1p**
c) Dacă $x_1 > y_1$, atunci șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent; analog dacă $x_1 < y_1$	**1p**
Astfel $x_1 = y_1$, deci $x_n = y_n$, $\forall n \geq 1$, de unde $x_{n+1} = x_n + 1$, $\forall n \geq 1$, ceea ce duce la $x_n = y_n = x_1 + n - 1$	**1p**

Enunț subiect 4, autor ***

Fie k și n numere naturale nenule. Arătați că dacă există o matrice A, cu elemente numere reale, astfel încât $A^2 + A + kI_n = O_n$, atunci există și o matrice B, cu elemente numere întregi, astfel încât $B^2 + B + kI_n = O_n$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Dacă $A^2 + A + kI_n = O_n$ cu, $A \in M_n(R)$ atunci $(2A + I_n)^2 = (1-4k)I_n$, deci, luând determinanți, $(1-4k)^n = \det^2(2A+I_n) \geq 0$, de unde reiese că n este par	**2p**
Dacă $n = 2$ putem lua $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -1 \end{pmatrix} \overset{not}{=} : B_2$	**2p**
Pentru n număr par oarecare putem lua $B = \begin{pmatrix} B_2 & O_2 & \cdots & O_2 \\ O_2 & B_2 & \cdots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \cdots & B_2 \end{pmatrix}$ (sunt $\frac{n}{2}$ blocuri B_2)	**3p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017
CLASA a 12-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor *Mihail Bălună*

Pentru $a,b\in\mathbb{Z}_5$, $a\neq\hat{0}$ definim funcția $f_{a,b}:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5$, $f_{a,b}(x)=ax+b$. Considerăm mulțimea S_5 a funcțiilor bijective de la $\mathbb{Z}_5$ la $\mathbb{Z}_5$, grupul $(S_5,\circ)$, unde „$\circ$" este compunerea funcțiilor și mulțimea $G=\{f_{a,b}\mid a,b\in\mathbb{Z}_5, a\neq\hat{0}\}$.

a) Arătați că G este subgrup al grupului $(S_5,\circ)$.

b) Determinați ordinele elementelor grupului $(G,\circ)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Se verifică faptul că funcțiile $f_{a,b}$ sunt bijective, G este parte stabilă și inversul unui element din G este tot în G.	3p
b) Dacă $e=f_{1,\hat{0}}$ este elementul neutru al lui G și $b\neq\hat{0}$, $(f_{1,b})^5=e$	1p
$(f_{2,b})^4=(f_{3,b})^4=e$	1p
$(f_{4,b})^2=e$	1p
Deoarece puterile mai mici ale acestor elemente sunt diferite de e, ordinele lor sunt 5, 4, respectiv 2	1p

Enunț subiect 2, autor *Marin Ionescu*, GM 12/2016

Fie $(A,+,\cdot)$ un inel cu 8 elemente. Arătați că $(A,+,\cdot)$ este corp dacă și numai dacă pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$, există $\alpha,\beta\in\{0,1\}$ astfel încât $x^3+\alpha x^2+\beta x+1=0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
„$\Leftarrow$" Dacă $x^3+\alpha x^2+\beta x+1=0$, atunci x are inversul $-x^2-\alpha x-\beta$	1p
„$\Rightarrow$" Deoarece grupul $(A,+)$ are ordinul 8, $(1+1)(1+1)(1+1)=0$ și, deoarece nu există divizori ai lui zero, $1+1=0$	1p
Deoarece grupul $(A\setminus\{0\},\cdot)$ are 7 elemente, $A\setminus\{0\}=\{1,a,a^2,\dots,a^6\}$, cu $x^7=1, x\neq 1$	1p
$a^7-1=(a-1)(a^3+a^2+1)(a^3+a+1)$, deci $a^3+a^2+1=0$ sau $a^3+a+1=0$	2p
În primul caz: $x=1\to\alpha=\beta=0$; $x=a\to\alpha=1,\beta=0$; $x=a^2\to\alpha=1,\beta=0$	2p

(deoarece $a^6=(a^2+1)^2=a^4+1$); $x=a^3 \to \alpha=0,\beta=1$ (deoarece $a^2=a^9$); cum a^4,a^5,a^6 sunt inversele lui a^3,a^2,a și relația $x^3+\alpha x^2+\beta x+1=0$ implică $1+\alpha x^{-1}+\beta x^{-2}+x^{-3}=0$, primul caz este finalizat; al doilea caz este similar	

Enunț subiect 3, autor ***

Pentru n număr natural nenul definim $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n^2x^n}{x^{n+1}+n}, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$.

a) Arătați că, pentru orice $x\in[0,1]$, șirul $(f_n(x))_n$ este convergent către 0.

b) Arătați că f_n este integrabilă pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă $0\le x<1$, atunci $0\le f_n(x)\le n^2x^n$ și $n^2x^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, de unde concluzia	**2p**
b) f_n coincide pe $[0,1)$ cu o funcție continuă pe $[0,1]$, deci este integrabilă	**1p**
$\int_0^1 f_n(x)dx=\dfrac{n^2}{n+1}\ln(x^{n+1}+n)\Big\vert_0^1=\dfrac{n}{n+1}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.	**2p**
$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=1\cdot\ln e=1$	**2p**

Enunț subiect 4, autor ***

Pentru n număr natural nenul definim $I_n=\int_0^\pi \cos x\cos 2x\cos 3x\ldots\cos nx\,\mathrm{d}x$.

a) Calculați I_1, I_2 și I_3.

b) Arătați că $I_{4n+1}=I_{4n+2}=0$ și $I_{4n+3}>0$, $I_{4n+4}>0$, pentru orice număr natural n.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $I_1=\sin x\Big\vert_0^\pi=0$, $I_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 3x}{3}+\sin x\right)\Big\vert_0^\pi=0$	**2p**
$I_3=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 4x}{4}+\dfrac{\sin 6x}{6}\right)\Big\vert_0^\pi=\dfrac{1}{4}$	**1p**
b) $I_{4n+1}=I_{4n+2}=0$, deoarece cu schimbarea de variabilă $x=\pi-t$ obținem $I_{4n+1}=\int_\pi^0(-1)^{2n+1}\cos t\ldots\cos nt(-1)\,\mathrm{d}t=-I_{4n+1}$ și analog pentru I_{4n+2}	**2p**
În celelalte cazuri, transformând în sumă, integrandul se poate scrie ca o sumă de termeni de forma $\cos 0$, $\cos k_1x$, ..., $\cos k_mx$, $0<k_1<\ldots<k_m$, în care termenul $\cos 0$ apare cel puțin o dată; cum $\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x=0$ pentru $k\in\mathbb{Z}^*$, rezultă $I_{4n+3}\ge\dfrac{1}{2^{4n+2}}$ și $I_{4n+4}\ge\dfrac{1}{2^{4n+3}}$	**2p**