Olimpiada Națională de Matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a V-a

1. Fie $n \in N^*$ şi numerele x, y si z, date prin :

$x = \{1^2 + 2^3 \cdot [3^4 - 3 \cdot (2^5 - 5)]\} \cdot 2^n$

$y = [(1 + 2 + 3 + \ldots + 10) : 11 - 2]^{n-1}$

$z = [(1 + 2^2 : 4) - (3^2 - 2^3)]^3 \cdot (1002 : 3 - 331)$

a) Comparaţi în funcție de numărul n numerele x, y, z. Discuţie.
b) Determinaţi ultima cifră a numărului $t = x \cdot y \cdot z$

2. Împărţind numărul natural x la numărul natural y, obţinem câtul 2 şi restul 41.

a) Arătaţi că $3x - 6y + 2$ este cubul unui număr natural.
b) Aflaţi numerele x si y, ştiind că $x + y < 167$.

3. Un elev scrie pe o foaie toate numerele naturale în ordine, începând cu 1 și terminând cu $\overline{300p}$.Știind că $(p-1)^{2017} = 2017^0$,aflați câte cifre are numărul scris de elev.

4. a) Completați căsuțele cu semne <, >, =, dând și justificări:

$$3^{16} \square\ 3 \cdot 32^5 \square\ 3 \cdot 2^{25} \square\ 4 \cdot 2^{25} \square\ 2^{27}$$

b) Comparați numerele: $a=8^9$ cu $b= 9^8$

Notă:

- *Timpul de lucru este de 2 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Barem de corectare

SUBIECTUL I

1. Fie $n \in N^*$ şi numerele x, y si z, date prin:

$x = \{1^2 + 2^3 \cdot [3^4 - 3 \cdot (2^5 - 5)]\} \cdot 2^n$

$y = [(1 + 2 + 3 + \ldots + 10) : 11 - 2]^{n-1}$

$z = [(1 + 2^2 : 4) - (3^2 - 2^3)]^3 \cdot (1002 : 3 - 331)$

a) Comparaţi în funcție de numărul n numerele x, y, z. Discuţie.

b) Determinaţi ultima cifră a numărului $t = x \cdot y \cdot z$

prof. Anca Vanţ

3p	a) $x = 2^n$, $y = 3^{n-1}$, $z = 3$
1p	Daca $n = 1 \Rightarrow y < x < z$
1p	Daca $n = 2 \Rightarrow y = z < x$
1p	Daca $n \geq 3 \Rightarrow z < x < y$
1p	b) $t = 2^n \cdot 3^{n-1} \cdot 3 = 2^n \cdot 3^n = 6^n \Rightarrow u(t) = 6$

SUBIECTUL II

2. Împărţind numărul natural x la numărul natural y, obţinem câtul 2 şi restul 41.

a) Arătaţi că $3x - 6y + 2$ este cubul unui număr natural.

b) Aflaţi numerele x si y, ştiind că $x + y < 167$.

prof. Bianca Nica

4p	a) $x = y \cdot 2 + 41, y > 41$ $3x - 6y + 2 = 3(2y + 41) - 6y + 2 = 125 = 5^3$
3p	b) $x + y = 2y + 41 + y = 3y + 41$ $x + y < 167$ $3y + 41 < 167 \rightarrow y < 42$, dar $y > 41 \Rightarrow y \in \theta$

SUBIECTL III

3. Un elev scrie pe o foaie toate numerele naturale în ordine, începând cu 1 și terminând cu $\overline{300p}$.

Știind că $(p-1)^{2017} = 2017^0$,aflați câte cifre are numărul scris de elev.

prof. Cozma Ildiko

2p	Din condiția dată rezultă $p - 1 = 1$, adică $p=2$
1p	Atunci numărul este 123...30013002
4p	Nr. total de cifre $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 2003 \cdot 4 = 10901$

SUBIECTUL IV

1. a) Completați căsuțele cu semne <, >, =, dând și justificări:

$3^{16} \square 3 \cdot 32^5 \square 3 \cdot 2^{25} \square 4 \cdot 2^{25} \square 2^{27}$

b) Comparați numerele: $a=8^9$ cu $b= 9^8$

(prelucrare GM)

prof.dr. Petru Braica

1p	a) $3^{16} = 3 \cdot 3^{15} = 3 \cdot (3^3)^5 = 3 \cdot 27^5 \boxed{<} 3 \cdot 32^5$ deci primul semn este $\boxed{<}$.
1p	$3 \cdot 32^5 = 3 \cdot (2^5)^5 = 3 \cdot 2^{25}$ deci al doilea semn va fi $\boxed{=}$.
1p	Deoarece $3 \cdot 2^{25} \boxed{<} 4 \cdot 2^{25}$ următorul semn va fi $\boxed{<}$.
1p	$4 \cdot 2^{25} = 2^2 \cdot 2^{25} = 2^{27}$deci ultimul semn va fi $\boxed{=}$.
3p	a) $b = 9^8 = (3^2)^8 = 3^{16}$ și conform punctului *a)* $3^{16} < 2^{27} = (2^3)^9 = 8^9 = a$ Deci $b < a$.

Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a V-a

1. Legyen $n \in N^*$ valamint az x, y és z számok , ahol :

$x = \{1^2 + 2^3 \cdot [3^4 - 3 \cdot (2^5 - 5)]\} \cdot 2^n$

$y = [(1 + 2 + 3 + \ldots + 10) : 11 - 2]^{n-1}$

$z = [(1 + 2^2 : 4) - (3^2 - 2^3)]^3 \cdot (1002 : 3 - 331)$

a) Hasonlítsd össze az x, y, z számokat az n függvényében. Tárgyalás.
b) Határoud meg a $t = x \cdot y \cdot z$ szám utolsó számjegyét.

2. Ha az x természetes számot elosztjuk az y természetes számmal akkor a hányados 2 és a maradék pedig 41.
a) Mutasd ki, hogy $3x - 6y + 2$ egy természetes szám köbe.
b) Tudva, hogy $x + y < 167$ határoyd meg az x és y számokat.

3. Egy tanuló leírja egy lapra a természetes számokat 1-től egészen a $\overline{300p}$ alakú számig. Tudva, hogy $(p-1)^{2017} = 2017^0$ határozd meg a felhasznált számjegyek számát.

4. a) Tölsd ki a <, >, = jelek valamelyikével az üres négyzeteket:

$3^{16} \square\, 3 \cdot 32^5 \,\square\, 3 \cdot 2^{25} \,\square\, 4 \cdot 2^{25} \,\square\, 2^{27}$, indokold meg a választ.

b) Hasonlítsd össze az $a = 8^9$ és $b = 9^8$ számokat.

Notă:
- *Timpul de lucru este de 2 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a V-a

1. Es sei $n \in N^*$ und die Zahlen x, y und z, wenn gegeben sind:

$x = \{1^2 + 2^3 \cdot [3^4 - 3 \cdot (2^5 - 5)]\} \cdot 2^n$

$y = [(1 + 2 + 3 + \ldots + 10) : 11 - 2]^{n-1}$

$z = [(1 + 2^2 : 4) - (3^2 - 2^3)]^3 \cdot (1002 : 3 - 331)$

a) Vergleicht die Zahlen x, y, z in Funktion von n . Diskutiere.
b) Bestimmt die letzte Ziffer der Zahl $t = x \cdot y \cdot z$

2. Teilt man die naturliche Zahl x durch die naturliche Zahl y, erhalt man den Quotient 2 und den Rest 41.

a) Zeigt,dass $3x - 6y + 2$ eine naturliche Kubus ist.
b) Findet die Zahlen x und y, wenn $x + y < 167$.

3. Ein Schuler schreibt alle naturlichen Zahlen in Reihenfolge,beginnt er mit 1 und beendet mit $\overline{300p}$.
Wenn $(p-1)^{2017} = 2017^0$, bestimmt wieviele Ziffer der Zahl hat,die von den Schuler geschrieben ist.

4. a) Erganzt die Kastchen mit der Symbolen <, >, =, und begrundet:

$$3^{16} \;\square\; 3 \cdot 32^5 \;\square\; 3 \cdot 2^{25} \;\square\; 4 \cdot 2^{25} \;\square\; 2^{27}$$

b) Vergleicht die Zahlen: $a = 8^9$ cu $b = 9^8$

Notă:

- *Timpul de lucru este de 2 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Olimpiada Naţională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a VI-a

1. a) Arătați că numărul A = $7^2 + 7^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 7^{2017}$ este divizibil cu 133.
   b) Determinati numerele naturale x, 2000 < x < 3000, care împărțite la 6,7 și 11 dau resturile 3, 1, respectiv 4.

2. a) Determinaţi numerele de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\frac{99}{\overline{abc}-a-b-c} \in N$.
   b) Să se determine numerele prime a şi b care satisfac relația: $62a^2 + 93a + b = 2017$

3. Se dau punctele coliniare A, B, C şi D în această ordine, astfel încât: $4 \cdot AB + 5 \cdot AD = 9 \cdot AC$ şi BD = 18 cm. Să se afle lungimea segmentelor BC şi CD.

4. Se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ două unghiuri adiacente suplementare astfel încât $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle AOB) + 30°$. Fie semidreptele [OM și [ON bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ respectiv $\sphericalangle BOC$, semidreapta [OF opusă semidreptei [OB și un punct P situat în acelaşi semiplan cu F astfel încât $m(\sphericalangle MOP) = 90°$
   a. Arătați că punctele N, O, P sunt coliniare
   b. Arătați că unghiurile $\sphericalangle POC$ și $\sphericalangle POF$ sunt suplementare.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 2 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Barem de corectare

SUBIECTUL I

a) Arătaţi că numărul $A = 7^2 + 7^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 7^{2017}$ este divizibil cu 133.

prof. Vandici Florian

b) Determinati numerele naturale x, 2000 < x < 3000, care împărțite la 6,7 și 11 dau resturile 3, 1, respectiv 4.

[GMB 3/2016]

1p	a) $A = 7(7^1+7^2 + \ldots\ldots + 7^{2016})$
1p	$A = 7[(7+7^2 + 7^3) + 7^3(7+7^2 + 7^3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + 7^{2013}(7+7^2 + 7^3)]$ $A = 7(399 + 7^3 \cdot 399 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 7^{2013} \cdot 399$
1p	$A = 7 \cdot 399(1+7^3 + \ldots\ldots + 7^{2013})$
1p	$399 \vdots 133 \Rightarrow A \vdots 133$
1p	b) Din teorema împărțirii cu rest avem egalitățile: $x = 6c_1 + 3; x = 7c_2 + 1; x = 11c_3 + 4$ Dacă vom scădea 15 din fiecare egalitate vom obține că: $x - 15 = 6c_1 - 12 = 6(c_1 - 2) \in M6$ $x - 15 = 7c_2 - 14 = 7(c_2 - 2) \in M7$ $x - 15 = 11c_3 - 11 = 11(c_3 - 1) \in M11$
1p	Deci x-15 este multiplu comun pentru numerele 6,7 și 11. Prin urmare x = [6;7;11] k+15, k$\in N$.
1p	Din condiția 2000< x< 3000 obținem numerele 2325 si 2787.

SUBIECTUL II

a) Determinaţi numerele de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\frac{99}{\overline{abc}-a-b-c} \in N$.

prof. Todoran Delia

b) Să se determine numerele prime a și b care satisfac relația: $62a^2 + 93a + b = 2017$

prof. Koczinger Eva

1p	a) $\frac{99}{\overline{abc} - a - b - c} = \frac{99}{100a + 10b + c - a - b - c} = \frac{99}{99a + 9b} = \frac{11}{11a + b}$
1p	$\frac{11}{11a + b} \in N \Rightarrow a = 1, b = 0$
2p	Numerele căutate sunt: 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109.
2p	b) Ecuația dată este echivalentă cu următoarea: $31a(2a+3)+b=2017$. 2017 fiind impar, rezultă cei doi termeni ai sumei sunt de paritate diferită $\Rightarrow$ a = 2 sau b = 2.
1p	Dacă a = 2 $\Rightarrow$ b = 1583 prim. Dacă b = 2 $\Rightarrow 31a(2a+3) = 2015 \Rightarrow a(2a+3) = 65 = 5 \cdot 13$ a fiind prim, rezultă a = 5 prim.

SUBIECTL III

Se dau punctele coliniare A, B, C și D în această ordine, astfel încât: $4 \cdot AB + 5 \cdot AD = 9 \cdot AC$ și BD = 18 cm. Să se afle lungimea segmentelor BC și CD.

prof. Bendel Ida Eniko

2p	$4 \cdot AB + 5 \cdot AD = 9(AD - AB)$
2p	$13AB = 4AD$
1p	$13AB = 4(AB + 18) \Longrightarrow AB = 8$
2p	$BC = 10; \quad CD = 8$

SUBIECTUL IV

Se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ două unghiuri adiacente suplementare astfel încât $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle AOB) + 30°$. Fie semidreptele [OM și [ON bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ respectiv $\sphericalangle BOC$, semidreapta [OF opusă semidreptei [OB și un punct P situat în același semiplan cu F astfel încât $m(\sphericalangle MOP) = 90°$

a. Arătați că punctele N, O, P sunt coliniare
b. Arătați că unghiurile $\sphericalangle POC$ și $\sphericalangle POF$ sunt suplementare.

prof. Pop Virgil

2p	Bisectoarele [OM si [ON fiind bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare acestea formează un unghi drept $m(\sphericalangle MON) = 90°$
1p	Dar $m(\sphericalangle MOP) = 90°$ de aici rezultă că punctele N, O și P sunt coliniare
2p	Fie $m(\sphericalangle AOB) = x \Longrightarrow m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = x + 2x + 30 = 180° \Rightarrow x = 50° \Rightarrow$ $m(\sphericalangle AOB) = 50°\ si\ m(\sphericalangle BOC) = 130°$
2p	Se arată că $m(\sphericalangle POC) = 115°\ si\ m(\sphericalangle POF) = 65°$ deci cele două unghiuri sunt suplementare

Olimpiada Naţională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a VI-a

1. a) Mutassátok ki, hogy az $A = 7^2 + 7^3 + \ldots\ldots + 7^{2017}$ szám osztható 133-mal.
   b) Határozzátok meg azokat az x természetes számokat, amelyeket ha elosztjuk 6,7 és 11-gyel, maradékul 3, 1 illetve 4 –et kapunk, és fennáll a $2000 < x < 3000$ összefüggés.

2. a) Határozzátok meg azokat az $\overline{abc}$ számokat melyekre igaz a

$\dfrac{99}{\overline{abc} - a - b - c} \in N$ állítás.

   b) Határozzátok meg azokat az a és b prímszámokat melyekre igaz a következő összefüggés: $62a^2 + 93a + b = 2017$.

3. Adottak az A, B, C és D pontok ebben a sorrendben úgy, hogy: $4 \cdot AB + 5 \cdot AD = 9 \cdot AC$ és BD = 18cm. Számítsátok ki a BC és CD szakaszok hosszát.

4. Adott az $AOB\sphericalangle$ és $BOC\ \sphericalangle$ két egymásmelletti kiegészítő szög úgy,hogy $m(BOC\sphericalangle) = 2m(AOB\sphericalangle) + 30°$. Legyen [OM és [ON az $AOB\sphericalangle$, illetve $BOC\sphericalangle$ szög szögfelezője. Az [OF félegyenes az [OB félegyenes ellentett félegyenese. A P pont az F ponttal azonos félsíkban van úgy hogy, $m(MOP\sphericalangle) = 90°$

   a. Mutassátok ki, hogy az N, O, P pontok kollineárisak .
   b. Mutassátok ki, hogy a $POC\sphericalangle$ és a $POF\sphericalangle$ kiegészítő szögek.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 2 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Olimpiada Naţională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a VI-a

1. a) Zeigt ,dass die Zahl A = $7^2 + 7^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 7^{2017}$ durch 133 teilbar ist .

   b) Bestimmt die naturlichen Zahlen x, $2000 < x < 3000$, welche geteilt durch 6,7,und 11 die Reste 3, 1, und 4 ergeben.

2. a) Bestimmt die Zahlen von der Form $\overline{abc}$ mit den Eigenschaften $\frac{99}{\overline{abc} - a - b - c} \in N$.

   b) Bestimmt die Primzahlen a und b welche die folgende Bedingung erfullt:
   $$62a^2 + 93a + b = 2017.$$

3. Es seien die kollinearen Punkten A, B, C und D in dieser Reihenfolge so,dass :
   $4 \cdot AB + 5 \cdot AD = 9 \cdot AC$ şi BD = 18cm. Bestimmt die Langen der Strecken BC und CD.

4. Es seien $\sphericalangle AOB$ *und* $\sphericalangle BOC$ zwei anliegende und supplementare Winkeln so, dass $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle AOB) + 30°$.Es seien die Halbgeraden [OM und [ON Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle AOB$ bzw. $\sphericalangle BOC$, die Strahlen [OF und [OB sind entgegengesetzt und der Punkt P in derselbe Halbebene mit F ist so, dass $m(\sphericalangle MOP) = 90°$
   a. Zeigt, dass die Punkten N, O, P kollinear sind.
   b. Zeigt, dass die Winkeln $\sphericalangle POC$ und $\sphericalangle POF$ supplementar sind.

Notă:
- *Timpul de lucru este de 2 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Olimpiada Naţională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a VII-a

1. Dacă $y = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \cdots + \frac{2017}{(1008\cdot1009)^2}$ rezolvați ecuația $x^2 = \frac{1}{1-y}$.

2. a) Determinaţi $x \in N$ știind că:
$\sqrt{1\cdot5 + 4\cdot5 + 4\cdot5^2 + 4\cdot5^3 + \cdots \dots\dots\dots. + 4\cdot5^{262} + 4\cdot5^{263}} = 25^{3x}$.

   b) Arătaţi că: $\frac{\sqrt{1\cdot2}}{3} + \frac{\sqrt{2\cdot3}}{5} + \frac{\sqrt{3\cdot4}}{7} + \frac{\sqrt{4\cdot5}}{9} + \frac{\sqrt{5\cdot6}}{11} < \frac{5}{2}$.

3. Fie ABCD un romb cu m(∢BAD) = 20°. Construim pe laturile (AD) spre exteriorul rombului ΔADF echilateral, respectiv pe latura (CD) spre interiorul rombului ΔCDE echilateral. Demonstrați că punctele E, B și F sunt coliniare și determinați m(∢DBE).

4. În trapezul ABCD oarecare , AB ∥ CD , AB baza mare. Fie (AM bisectoarea unghiului $\widehat{CAB}$, M∈[BC], astfel încât [BM]≡ [MC] și DM ∩ AB = { E}.
   a) Să se arate că DBEC este paralelogram.
   b) Dacă AM ∩ CE ={N} și BP ⊥ BC , P∈[CE] , arătați că 2 MN = BP.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Barem de corectare

<table>
<tr><td colspan="2">SUBIECTUL I
Dacă $y = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \cdots + \frac{2017}{(1008\cdot 1009)^2}$ rezolvați ecuația $x^2 = \frac{1}{1-y}$.
prof.dr. Muntean Doina</td></tr>
<tr><td>3p</td><td>$$y = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \cdots + \frac{2017}{(1008\cdot 1009)^2} = \frac{2^2-1^2}{(1\cdot 2)^2} + \frac{3^2-2^2}{(2\cdot 3)^2} + \cdots + \frac{1009^2-1008^2}{(1008\cdot 1009)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{1008^2} - \frac{1}{1009^2} = 1 - \frac{1}{1009^2}$$</td></tr>
<tr><td>3p</td><td>Ecuația $x^2 = \frac{1}{1-y}$ devine: $\frac{1}{1-1+\frac{1}{1009^2}} = x^2$</td></tr>
<tr><td>1p</td><td>deci $x \in \{\pm 1009\}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">SUBIECTL II
1. a) Determinați $x \in N$ știind că:
$\sqrt{1\cdot 5 + 4\cdot 5 + 4\cdot 5^2 + 4\cdot 5^3 + \cdots \dots\dots\dots . + 4\cdot 5^{262} + 4\cdot 5^{263}} = 25^{3x}$.
b) Arătați că: $\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3} + \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5} + \frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7} + \frac{\sqrt{4\cdot 5}}{9} + \frac{\sqrt{5\cdot 6}}{11} < \frac{5}{2}$.
prof. Stirbu Erika</td></tr>
<tr><td>1p</td><td>a) S= $1\cdot 5 + 4\cdot 5 + 4\cdot 5^2 + 4\cdot 5^3 + \cdots \dots\dots\dots . + 4\cdot 5^{262} + 4\cdot 5^{263}$
Grupăm primii doi termini și obținem:
S= $5^2 + 4\cdot 5^2 + 4\cdot 5^3 + \cdots \dots\dots\dots . + 4\cdot 5^{262} + 4\cdot 5^{263}$</td></tr>
<tr><td>1p</td><td>Din nou grupăm primii doi termeni:
S= $5^3 + 4\cdot 5^3 + 4\cdot 5^4 \dots\dots\dots\dots . + 4\cdot 5^{262} + 4\cdot 5^{263}$</td></tr>
<tr><td>1p</td><td>Grupând analog, se obține:
S = $5^{263} + 4\cdot 5^{263} = 5^{264}$</td></tr>
<tr><td>1p</td><td>$25^{3x} = (5^2)^{3x} = 5^{6x}$, deci $\sqrt{5^{264}} = 5^{6x}$, de unde $5^{132} = 5^{6x}$; 6x = 132, deci x = 22</td></tr>
<tr><td>1p</td><td>b) $\sqrt{a\cdot b} < \frac{a+b}{2}$ pentru a, b $\in R_+$ și a $\neq b$</td></tr>
<tr><td>1p</td><td>$$\sqrt{1\cdot 2} < \frac{1+2}{2}, \quad \dots ., \frac{\sqrt{5\cdot 6}}{11} < \frac{1}{2}$$</td></tr>
<tr><td>1p</td><td>finalizare</td></tr>
</table>

SUBIECTL III Fie ABCD un romb cu m(∢BAD) = 20°. Construim pe laturile (AD) spre exteriorul rombului ΔADF echilateral, respectiv pe latura (CD) spre interiorul rombului ΔCDE echilateral. Demonstrați că punctele E, B și F sunt coliniare și determinați m(∢DBE). prof.dr. Braica Petru	
2p	ΔABF cu AB = AF, m(∢BAF) = 20° + 60° = 80°, prin urmare m(∢ABF) = (180° – 80°): 2 = 50°
2p	În ΔECB cu BC = CE, m(∢BCE) = 60° – 20° = 40°, prin urmare m(∢CBE) = (180° – 40°): 2 = 70°
1p	m(∢EBF) = m(∢EBC) + m(∢CBD) + m(∢DBF) = 70° + 80° + (80° – 50°) = 180°
1p	deci are loc coliniaritatea punctelor E, B, F
1p	m(∢DBE) = 180° – m(∢DBF) = 150°.
SUBIECTUL IV În trapezul ABCD oarecare , AB ∥ CD , AB baza mare. Fie (AM bisectoarea unghiului $\widehat{CAB}$, M∈[BC], astfel încât [BM]≡ [MC] și DM ∩ AB = { E}. a) Să se arate că DBEC este paralelogram. b) Dacă AM ∩ CE ={N} și BP ⊥ BC , P∈[CE] , arătați că 2 MN = BP. prof. Grecu Maria	
2p	a) Din congruența triunghiurilor MDC și BME (ULU) rezultă că DC =BE
1p	Acestea sunt și paralele, rezultă că patrulaterul este paralelogram
1p	b) În triunghiul ABC, AM este mediană și bisectoare, rezultă că este isoscel
1p	Atunci AM este și înălțime, adică AM⊥ BC
1p	BP ⊥ BC, rezultă că MN ∥ BP
1p	[BM]≡ [MC] rezultă că MN este linie mijlocie în triunghiul CBP MN = $\frac{BP}{2}$.

Olimpiada Naţională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a VII-a

1. Ha $y = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \cdots + \frac{2017}{(1008\cdot 1009)^2}$ egyenlet megoldásához $x^2 = \frac{1}{1-y}$.

2. a) Határozd meg az $x \in N$ számot tudva, hogy:
$\sqrt{1\cdot 5 + 4\cdot 5 + 4\cdot 5^2 + 4\cdot 5^3 + \cdots \ldots \ldots \ldots . + 4\cdot 5^{262} + 4\cdot 5^{263}} = 25^{3x}$.

   b) Mutasd ki, hogy: $\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3} + \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5} + \frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7} + \frac{\sqrt{4\cdot 5}}{9} + \frac{\sqrt{5\cdot 6}}{11} < \frac{5}{2}$.

3. Az ABCD rombuszban m(∢BAD) = 20°. A rombusz (AD) oldalára, a rombusz külső tartományában, ADF egyenlő oldalú háromszöget, a (CD) oldalára, a rombusz belső tartománya felé, pedig a CDE egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk. Bizonyítsd be, hogy az E, B és F pontok kollineárisak és határozd meg m(∢DBE)-t.

4. Az ABCD trapézban AB ∥ CD , AB nagyalap. Legyen (AM a $\widehat{CAB}$ szög szögfelezője, M∈[BC] úgy, hogy [BM]≡ [MC] és DM ∩ AB = { E}.
   a) Igazold, hogy DBEC paralelogramma.
   b) Ha AM ∩ CE ={N} és BP ⊥ BC , P∈[CE] mutasd ki, hogy 2 MN = BP.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a VII-a

1. Wenn $y = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \cdots + \frac{2017}{(1008\cdot 1009)^2}$ lösen die Gleichung $x^2 = \frac{1}{1-y}$.

2. a) Bestimmt $x \in N$ wenn :

$$\sqrt{1\cdot 5 + 4\cdot 5 + 4\cdot 5^2 + 4\cdot 5^3 + \square \ldots\ldots\ldots + 4\cdot 5^{262} + 4\cdot 5^{263}} = 25^{3x}.$$

b) Zeigt,dass: $\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3} + \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5} + \frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7} + \frac{\sqrt{4\cdot 5}}{9} + \frac{\sqrt{5\cdot 6}}{11} < \frac{5}{2}$.

3. Es sei ABCD ein Rhombus mit m(∢BAD) = 20°. Konstruiert man auf die Seite (AD) ausserhalb des Rhombus ein gleichseitiges Dreieck ΔADF , beziehungsweise auf die Seite (CD) in innerhalb des Rhombus ein gleichseitiges Dreieck ΔCDE. Beweist ,dass die Punkten E, B und F kollinear sind und bestimmt m(∢DBE).

4. In einen beliebigen Trapez ABCD , AB ∥ CD , AB ist die grosse Grundlinie. Es sei (AM Winkelhalbierende des Winkels $\widehat{CAB}$, M∈ [BC] so, dass [BM]≡ [MC] und DM ∩ AB = { E}.
   a) Zeigt, dass DBEC ein Parallelogramm ist.
   b) Wenn AM ∩ CE ={N} und BP ⊥ BC , P∈[CE] zeigt, dass 2 MN = BP.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a VIII-a

1. a. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+100)=5150$.

b. Demonstraţi egalitatea:

$$1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}}=\sqrt{2017}.$$

2. a. Demonstrați inegalitatea: $n\cdot k+1\geq 2\sqrt{n\cdot k}$, $\forall n,k\in N^*$.

b. Demonstrați inegalitatea: $n^3+n^2+2n\geq 4\sqrt{n}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}\right)$, $\forall n\in N^*$.

3. Se consideră un dreptunghi ABCD cu AB=2 și BC=$\sqrt{3}$. Punctul M aparține laturii AD astfel încât MD = $2\cdot AM$ și punctul N este mijlocul segmentului [AB]. Pe planul dreptunghiului se ridică perpendiculara MP și se alege punctul Q pe segmentul MP astfel încât măsura unghiului planelor (MPC) și (NPC) să fie de 45^0, iar măsura unghiului planelor (MPC) și (QNC) să fie de 60^0.

a. Demonstrați că dreptele DN și CM sunt perpendiculare.

b. Aflați lungimile segmentelor PM, respectiv QM.

4. Considerăm cubul ABCDA'B'C'D' de muchie AB = a, $a\in\mathbb{R}_+^*$. Considerăm $M_k\in(A'D')$, $N_k\in(CC')$, $P_k\in(AB)$ astfel încât: $\frac{A'M_k}{M_kD'}=\frac{C'N_k}{N_kC}=\frac{BP_k}{P_kA}=k$, $k\in\mathbb{R}_+^*$.

a. Demonstrați că $\Delta M_kN_kP_k$ e echilateral.

b. Demonstrați că tetraedrele $DM_kN_kP_k$ și $B'M_kN_kP_k$ sunt piramide regulate.

c. Demonstrați că $\left(M_{k_1}N_{k_1}P_{k_1}\right)\parallel\left(M_{k_2}N_{k_2}P_{k_2}\right)$, pentru orice $k_1\neq k_2$, $k_i\in\mathbb{R}_+^*$, $i=\overline{1,2}$.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Barem de corectare

SUBIECTUL I

a. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+100)=5150$.

b. Demonstraţi egalitatea:

$$1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}}=\sqrt{2017}.$$

Prof. Tămîian Traian

2p	a) $100x+5050=5150$
1p	$\Leftrightarrow x=1$
2p	b) Membrul stâng se scrie $E=1+\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\ldots+\frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2016}}{2017-2016}$
2p	$\Rightarrow E=\sqrt{2017}$

SUBIECTUL II

a. Demonstrați inegalitatea: $n\cdot k+1\geq 2\sqrt{n\cdot k}$, $\forall n,k\in N^*$.

b. Demonstrați inegalitatea: $n^3+n^2+2n\geq 4\sqrt{n}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}\right)$, $\forall n\in N^*$.

3p	Inegalitaea mediilor
1p	$n\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\geq 2\sqrt{n\cdot 1}+2\sqrt{n\cdot 2}+\ldots+2\sqrt{n\cdot n}\Leftrightarrow$
1p	$n\cdot(1+2+3+\ldots n)+n\geq 2\sqrt{n\cdot 1}+2\sqrt{n\cdot 2}+\ldots+2\sqrt{n\cdot n}\Leftrightarrow$
1p	$(n\cdot 1+1)+(n\cdot 2+1)+(n\cdot 3+1)+\ldots+(n\cdot n+1)\geq 2\sqrt{n\cdot 1}+2\sqrt{n\cdot 2}+\ldots+2\sqrt{n\cdot n}$
1p	Dar, din inegalitatea mediilor, avem: $n\cdot 1+1\geq 2\sqrt{n\cdot 1}$ $n\cdot 2+1\geq 2\sqrt{n\cdot 2}$ $n\cdot 3+1\geq 2\sqrt{n\cdot 3}$ ……… $n\cdot n+1\geq 2\sqrt{n\cdot n}$ Prin însumarea inegalităţilor de mai sus se obţine inegalitatea cerută

SUBIECTL III

Se consideră un dreptunghi ABCD cu AB=2 și BC=$\sqrt{3}$. Punctul M aparține laturii AD astfel încât MD = $2 \cdot AM$ și punctul N este mijlocul segmentului [AB]. Pe planul dreptunghiului se ridică perpendiculara MP și se alege punctul Q pe segmentul MP astfel încât măsura unghiului planelor (MPC) și (NPC) să fie de 45^0, iar măsura unghiului planelor (MPC) și (QNC) să fie de 60^0.

a. Demonstrați că dreptele DN și CM sunt perpendiculare.

b. Aflați lungimile segmentelor PM, respectiv QM.

1p	a) $DM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, AN = 1 $\Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{DM}{DC}$
1p	$\Delta AND \approx \Delta DMC(LUL) \Rightarrow m(\angle DMC) + m(\angle ADM) = 90^0 \Rightarrow m(\angle DTM) = 90^0$ $DN \cap CM = \{T\}$ Deci , DN $\perp CM$ ....(
2p	b) Din punctul a) deducem ca $DN \perp (PMC)$ si fie R, S proiectiile lui T pe CQ, respectiv PC. Din teorema celor 3$\perp$ deducem ca $NR \perp CQ$ si $NS \perp PC$ ....(1p) Unghiul planelor (MPC) si (NPC) este $\angle TSN$, iar unghiul planelor (MPC) si (QNC) este $\angle TRN$. Prin calcul gasim $CT = \sqrt{3}, RC = \frac{2\sqrt{6}}{3}, MC = \frac{4\sqrt{3}}{3}, TN = 1, TR = \frac{1}{\sqrt{3}}, TS = 1$
2p	Din asemanarile $\Delta CRT \approx \Delta CQM$ si $\Delta CTS \approx \Delta CMP$ rezulta $QM = \frac{RT \cdot MC}{RC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ si $MP = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

SUBIECTUL IV

Considerăm cubul ABCDA'B'C'D' de muchie AB = a, a$\in\mathbb{R}_+^*$. Considerăm $M_k \in (A'D')$, $N_k \in (CC')$, $P_k \in (AB)$ astfel încât: $\frac{A'M_k}{M_kD'} = \frac{C'N_k}{N_kC} = \frac{BP_k}{P_kA} = k$, $k \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Demonstrați că $\Delta M_kN_kP_k$ e echilateral.

b. Demonstrați că tetraedrele $DM_kN_kP_k$ și $B'M_kN_kP_k$ sunt piramide regulate.

c. Demonstrați că $\left(M_{k_1}N_{k_1}P_{k_1}\right) \parallel \left(M_{k_2}N_{k_2}P_{k_2}\right)$, pentru orice $k_1 \neq k_2$, $k_i \in \mathbb{R}_+^*$, $i = \overline{1,2}$.

prof.dr. Braica Petru

1p	a) Avem că $C'N_k = A'M_k = BP_k$
1p	Din congruența $\Delta C'D'M_k \equiv \Delta A'AP_k \equiv \Delta BCN_k$ avem $C'M_k = A'P_k = BN_k$
1p	Prin urmare $\Delta N_kC'M_k \equiv \Delta M_kA'P_k \equiv \Delta P_kBN_k$ (C.C.), de unde concluzia
1p	b) $\Delta B'BP_k \equiv \Delta B'A'M_k \equiv \Delta B'C'N_k$ (C.C.) $\Rightarrow$ $B'P_k = B'M_k = B'N_k$, deci $B'M_kN_kP_k$ piramidă regulată
1p	Analog $DM_kN_kP_k$.
1p	c) Din b) $\Rightarrow B'D \perp (M_kN_kP_k)$, $\forall\, k \in \mathbb{R}_+^*$.
1p	Din $\left.\begin{array}{l} B'D \perp \left(M_{k_1}N_{k_1}P_{k_1}\right) \\ B'D \perp \left(M_{k_2}N_{k_2}P_{k_2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(M_{k_1}N_{k_1}P_{k_1}\right) \parallel \left(M_{k_2}N_{k_2}P_{k_2}\right)$

Olimpiada Naţională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a VIII-a

1. a. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet :
$$(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+100)=5150.$$
b. Mutasd ki :
$$1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}}=\sqrt{2017}.$$

2. a. Bizonyítsd be a következő egyenlőtlenséget:
$$n\cdot k+1\geq 2\sqrt{n\cdot k},\ \forall n,k\in N^*.$$
b. Bizonyítsd be a következő egyenlőtlenséget:
$$n^3+n^2+2n\geq 4\sqrt{n}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}\right),\ \forall n\in N^*.$$

3. Adott az ABCD téglalap, ahol AB = 2 és BC = $\sqrt{3}$. Legyen M az AD oldal egy pontja úgy, hogy MD = $2\cdot AM$ és N az [AB] szakasz felezőpontja. A téglalap síkjára egy MP merőlegest emelünk , amelyen felvesszük a Q pontot úgy, hogy az (MPC) és (NPC) síkok által alkotott szög mértéke 45^0, valamint az (MPC) és (QNC) síkok által alkotott szög mértéke 60^0 legyen.
a. Igazold, hogy a DN és CM egyenesek merőlegesek egymásra.
b. Határozd meg a PM illetve a QM szakaszok hosszát.

4. Adott az ABCDA'B'C'D' kocka, ahol AB = a, $a\in\mathbb{R}_+^*$. Legyen $M_k\in$(A'D'), $N_k\in$(CC'), $P_k\in$(AB) úgy, hogy : $\frac{A'M_k}{M_kD'}=\frac{C'N_k}{N_kC}=\frac{BP_k}{P_kA}=k$, $k\in\mathbb{R}_+^*$.
a. Igazold, hogy a $M_kN_kP_k\Delta$ egyenlő oldalú.
b. Bizonyítsd be, hogy a $DM_kN_kP_k$ és $B'M_kN_kP_k$ tetraéderek szabályos gúlák.
c. Igazold, hogy az $\left(M_{k_1}N_{k_1}P_{k_1}\right)\parallel\left(M_{k_2}N_{k_2}P_{k_2}\right)$, bármely $k_1\neq k_2$, $k_i\in\mathbb{R}_+^*$, $i=\overline{1,2}$ esetén.

Notă:
- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Olimpiada Naţională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a VIII-a

1. a. Lost in **R** die Gleichung: $(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+100)=5150$.

   b.Zeigt der Gleichheit:

$$1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}}=\sqrt{2017}.$$

2. a. Beweist die Ungleichung : $n\cdot k+1\geq 2\sqrt{n\cdot k}$, $\forall n,k\in N^{*}$.

   b. Beweist die Ungleichung: $n^{3}+n^{2}+2n\geq 4\sqrt{n}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}\right)$, $\forall n\in N^{*}$.

3. Es sei ein Rechteck ABCD mit AB=2 und BC=$\sqrt{3}$. Der Punkt M gehort der Seite AD so, dass $MD=2\cdot AM$ und der Punkt N in die Mitte der Strecke $[AB]$ ist. Auf die Ebene des Rechtecks errichtet man die Senkrechte MP und nimmt man der Punkt Q auf der Strecke MP so, dass das Mass des Flachenwinkels der Ebenen (MPC) und (NPC) 45^{0} betragt, und das Mass des Flachenwinkels der Ebenen (MPC) und (QNC) 60^{0} betragt.

   a. Beweisst,dass die Geraden DN und CM senkrecht aufeinander stehen.

   b. Berechnet die Lange der Strecken PM, beziehungsweise QM.

4. Es sei der Wurfel ABCDA'B'C'D' mit der Kanten AB = a, $a\in\mathbb{R}_{+}^{*}$. Nimmt man $M_k\in(A'D')$, $N_k\in(CC')$, $P_k\in(AB)$ so,dass: $\frac{A'M_k}{M_kD'}=\frac{C'N_k}{N_kC}=\frac{BP_k}{P_kA}=k$, $k\in\mathbb{R}_{+}^{*}$.

   a. Beweist, dass $\Delta M_kN_kP_k$ gleichseitig ist.

   b. Beweist, dass die Tetraedern $DM_kN_kP_k$ und $B'M_kN_kP_k$ regelmassigen Pyramiden sind.

   c. Beweist, dass $\left(M_{k_1}N_{k_1}P_{k_1}\right)\parallel\left(M_{k_2}N_{k_2}P_{k_2}\right)$, fur jede $k_1\neq k_2$, $k_i\in\mathbb{R}_{+}^{*}$, $i=\overline{1,2}$.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a IX-a

1. a) Să se demonstreze că $(1+x)^n+\left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$, pentru orice $x>0$ și $n\in N$.

   b) Să se arate că: $\left(\sqrt{2}\right)^{2016}+\left(2+\sqrt{2}\right)^{2016} \geq 2^{2017}$

2. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=\frac{1}{3}$ și $1-\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4}{2n+3}$, $(\forall)n\geq 1$.

   a) Aflați termenul general al șirului

   b) Determinați valorile numărului natural n ≥ 2, pentru care $\left\{\sum_{k=2}^{n} a_k\right\} \in \left[\frac{1}{15},\frac{1}{7}\right]$,

   unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x.

3. Să se determine funcţiile $f,g:R\to R$ ştiind că satisfac simultan condiţiile:

   i) $f(x-2)+1\leq x\leq g(x)+1$, $\forall x\in R$ şi

   ii) $g(x+2)-1\leq x\leq f(x)-1$, $\forall x\in R.$

4. În triunghiul oarecare ABC, fie D și E simetricele lui B față de A respectiv C. Fie M, N, P și Q mijloacele segmentelor (CD), (AE), (CE) respectiv (BM), iar $BN\cap AC=\{S\}$. Demonstrați că punctele P, Q și S sunt coliniare.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Barem de corectare

SUBIECTUL I	
1. a) Să se demonstreze că $(1+x)^n + \left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$, pentru orice $x>0$ și $n \in N$. b) Să se arate că: $\left(\sqrt{2}\right)^{2016} + \left(2+\sqrt{2}\right)^{2016} \geq 2^{2017}$ prof.Koczinger Éva	
1p	Se verifică pentru n = 0 adevărat.
1p	Pt. $n=1$ avem $1+x+1+\frac{1}{x} \geq 2+2=4$ utilizând inegalitatea $x+\frac{1}{x} \geq 2$ pt. $\forall x>0$.
2p	Pentru $n \geq 2$ utilizând inegalitatea mediilor obținem $(1+x)^n + \left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geq 2\sqrt{(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n} = 2\sqrt{\left(2+x+\frac{1}{x}\right)^n} \geq 2\sqrt{4^n} = 2^{n+1}$,
2p	$x \mapsto \qquad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{x} = 2+\sqrt{2}$
1p	finalizare
SUBIECTUL II	
Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = \frac{1}{3}$ și $1-\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{2n+3}$, $(\forall)n \geq 1$. a) Aflați termenul general al șirului b) Determinați valorile numărului natural n ≥ 2, pentru care $\left\{\sum_{k=2}^{n} a_k\right\} \in \left[\frac{1}{15}, \frac{1}{7}\right]$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x. prof. Galambosi Csaba	
1p	Calculul $a_2 = \frac{1}{3\cdot 5}$, $a_3 = \frac{1}{5\cdot 7}$
1p	$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
2p	Demonstrarea prin inducție
2p	$\sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{n-1}{3(2n+1)} \prec 1 \Rightarrow \left\{\sum_{k=2}^{n} a_k\right\} = \sum_{k=2}^{n} a_k$

1p	$\frac{1}{15} \leq \frac{n-1}{3(2n+1)} \leq \frac{1}{7} \Leftrightarrow 2 \leq n \leq 10 \Leftrightarrow n \in \{2,3,4,...,10\}$
SUBIECTL III Să se determine funcţiile $f, g : R \to R$ ştiind că satisfac simultan condiţiile: i) $f(x-2)+1 \leq x \leq g(x)+1$, $\forall x \in R$ şi ii) $g(x+2)-1 \leq x \leq f(x)-1$, $\forall x \in R.$ prof. Tămâian Traian	
1p	Din condiţia i) rezultă $g(x) \geq x-1$, $\forall x \in R$ (1) şi $f(x-2) \leq x-1, \forall x \in R$ (2)
2p	Înlocuind x cu $x+2$ din (2) rezultă $f(x) \leq x+1, \forall x \in R$ (3)
2p	Din condiţia ii) rezultă $f(x) \geq x+1, \forall x \in R$ (4) şi $g(x+2) \leq x+1, \forall x \in R$ (5) Înlocuind x cu $x-2$ din (5) rezultă $g(x) \leq x-1, \forall x \in R$ (6)
2p	Din relaţiile (3) şi (4) obţinem $f(x) = x+1, \forall x \in R$ iar din (1) şi (6) rezultă $g(x) = x-1, \forall x \in R.$
SUBIECTUL IV În triunghiul oarecare ABC, fie D și E simetricele lui B față de A respectiv C. Fie M, N, P și Q mijloacele segmentelor (CD), (AE), (CE) respectiv (BM), iar $BN \cap AC = \{S\}$. Demonstrați că punctele P, Q și S sunt coliniare. (***)	
1p	N mijlocul (AE) $\Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}}{2} = \frac{\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}}{2}$ S centrul de greutate ΔABE $\Rightarrow \overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}}{3}$
1p	$\overrightarrow{BQ} = \frac{\overrightarrow{BM}}{2} = \frac{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}}{4} = \frac{2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{4}$, $\overrightarrow{BP} = \frac{3\overrightarrow{BC}}{2}$
2p	$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BP} = \frac{2\overrightarrow{BA}-5\overrightarrow{BC}}{4}$
2p	$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BP} = \frac{2\overrightarrow{BA}-5\overrightarrow{BC}}{6}$
1p	$\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PS} \Rightarrow$ P, Q, S coliniare

Olimpiada Naţională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a IX-a

1. a) Bizonyítsd be, hogy bármely $x>0$ és $n\in N$ esetén: $(1+x)^n+\left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$.

   b) Igazold hogy: $\left(\sqrt{2}\right)^{2016}+\left(2+\sqrt{2}\right)^{2016} \geq 2^{2017}$

2. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat, ahol $a_1=\frac{1}{3}$ és $1-\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4}{2n+3}$, $(\forall)n\geq 1$.

   a) Határozd meg a sorozat általános tagját.

   b) Határozd meg az n ≥ 2 természetes szám értékeit amelyre $\left\{\sum_{k=2}^{n} a_k\right\} \in \left[\frac{1}{15},\frac{1}{7}\right]$,

   ahol $\{x\}$ az x szám tört részét jelöli.

3. Határozd meg az $f,g:R\to R$ függvényeket amelyek egyidőben teljesítik a következő feltételeket:

   i) $f(x-2)+1\leq x\leq g(x)+1$, $\forall x\in R$

   ii) $g(x+2)-1\leq x\leq f(x)-1$, $\forall x\in R$.

4. Az ABC általános háromszögben, legyen D a B pont A szerinti szimetrikusa és E a B pont C szerinti szimetrikusa. Legyen M, N, P és Q az (CD), (AE), (CE) valamint (BM) szakaszok felezőpontjai. Ha $BN\cap AC=\{S\}$,bizonyítsátok be, hogy P, Q és S kollineáris pontok.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a X-a

1. Determinați funcția $f: R \to R$ pentru care $f(f(x+y)) = y + f(x+2015)$, $\forall x, y \in R$.

2. Fie $z \in C^*$, astfel încât $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ și $E_n = z^n + \frac{1}{z^n}$, $n \in N^*$.

   a) Calculați E_{15}.

   b) Determinați mulțimea $\{E_n \mid n \in N^*\}$.

3. Demonstraţi că pentru orice $a, b \in (1, \infty)$ are loc inegalitatea:
$$\frac{1}{\sqrt{1+\log_a \sqrt{b}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\log_b a^2}} \le \sqrt{2}.$$

4. Fie paralelogramul ABCD. Pe laturile AB și AC se construiesc triunghiurile echilaterale ABE, spre exteriorul paralelogramului și respectiv BCF spre interiorul paralelogramului. Dacă are loc coliniaritatea punctelor E, D F, arătați că paralelogramul ABCD este romb.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Barem de corectare

SUBIECTUL I

Determinați funcția $f : R \to R$ pentru care $f(f(x+y)) = y + f(x+2015)$, $\forall x, y \in R$.

prof. Popescu Călin

2p	se demonstrează că f este injectivă fie $x_1, x_2 \in R$ cu $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow$ $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ $\Rightarrow$ $f(x_1 + 2015) = f(x_2 + 2015)$
2p	cum $f(f(x_1 + x_2)) = f(f(x_2 + x_1))$ $\Rightarrow$ $x_2 + f(x_1 + 2015) = x_1 + f(x_2 + 2015)$
1p	deci $x_2 = x_1$, adică f este injectivă
1p	pentru $y = 0$ se obține $f(f(x)) = f(x+2015)$, $\forall x \in R$
1p	cum f este injectivă $\Rightarrow f(x) = x + 2015$, $\forall x \in R$

SUBIECTUL II

Fie $z \in C^*$, astfel încât $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ și $E_n = z^n + \frac{1}{z^n}$, $n \in N^*$.

a) Calculați E_{15}.

b) Determinați mulțimea $\{E_n \mid n \in N^*\}$.

prof. Popescu Călin

1p	a) $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2} \Rightarrow z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$, cu $z_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$, $z_1 + z_2 = \sqrt{2}$ $z_1 \cdot z_2 = 1$
1p	$z_1^{2015} + \frac{1}{z_1^{2015}} = z_1^{2015} + z_2^{2015}$ și $z_2^{2015} + \frac{1}{z_2^{2015}} = z_2^{2015} + z_1^{2015}$, deci $z^{2015} + \frac{1}{z^{2015}} = z_1^{2015} + z_2^{2015}$
1p	$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$
1p	$z_1^{2015} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2015}$ $\Rightarrow z_1^{2015} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $z_1^{2015} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$ $\Rightarrow z_1^{2015} = z_2$ analog $z_1^{2015} = z_2$ $E_{2015} = z^{2015} + \frac{1}{z^{2015}} = z_1^{2015} + z_2^{2015} = z_2 + z_1 = \sqrt{2}$
1p	b) $E_n = z^n + \frac{1}{z^n} = z_1^n + z_2^n = \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{7n\pi}{4} + i\sin\frac{7n\pi}{4}$
2p	fie $k \in N^*$ $n = 8k$, $E_{8k} = 2$ $n = 8k+1$, $E_{8k+1} = \sqrt{2}$

	$n=8k+2,\ E_{8k+2}=0$ $n=8k+3,\ E_{8k+3}=-\sqrt{2}$ $n=8k+4,\ E_{8k+4}=-2$ $n=8k+5,\ E_{8k+5}=\sqrt{2}$ $n=8k+6,\ E_{8k+6}=0$ $n=8k+7,\ E_{8k+7}=\sqrt{2}$ $M=\{-2,-\sqrt{2},0,\sqrt{2},2\}$

SUBIECTL III

Demonstraţi că pentru orice $a,b\in(1,\infty)$ are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\log_a\sqrt{b}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\log_b a^2}}\le\sqrt{2}.$$

prof. Tămîian Traian

2p	Notând $\log_a b=t\in(0,\infty)$, inegalitatea se scrie echivalent $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\log_a b}}+\frac{1}{\sqrt{1+2\log_b a}}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow$
2p	$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{t}}}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+2}}+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+2}}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow$
3p	$\sqrt{t}+\sqrt{2}\le\sqrt{2(t+2)}\Leftrightarrow$ $t+2+2\sqrt{2t}\le2(t+2)\Leftrightarrow0\le t-2\sqrt{2t}+2\Leftrightarrow(\sqrt{t}-\sqrt{2})^2\ge0,$ relaţie adevărată.

SUBIECTUL IV

Fie paralelogramul ABCD. Pe laturile AB și AC se construiesc triunghiurile echilaterale ABE, spre exteriorul paralelogramului și respectiv BCF spre interiorul paralelogramului. Dacă are loc coliniaritatea punctelor E, D F, arătați că paralelogramul ABCD este romb.

prof.dr. Braica Petru

2p	Notăm cu a,b,c,d,e,f afixele vârfurilor A,B,C,D,E,F. Avem egaliățile imediate: b-a = c-d, d-a = c-b, e = a+(b-a)ε si f = c+(b-c) ε, cu $\varepsilon=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\pi/3$.
1p	Din condiția de coliniaritate a punctelor rezultă că (f-d)/(e-d) = k, $k\in R^*$
2p	După înlocuiri obținem: (b-a)+(b-c) ε=(b-c)k+(b-a)k ε sau (b-a)(1-k ε) = $(b-c)(k-\varepsilon)$.
2p	Deoarece numerele complexe 1-k ε și $k-\varepsilon$ au același modul, trecând la modul în ultima egalitate rezultă concluzia

Olimpiada Naţională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a X-a

1. Határozd meg azt az $f:R\to R$ függvényt melyre $f(f(x+y))=y+f(x+2015),\ \forall x,y\in R$.
2. Legyen $z\in C^*$ úgy, hogy $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$ és $E_n=z^n+\frac{1}{z^n}$, $n\in N^*$.

   a) Számítsd ki E_{15}.

   b) Határozd meg az $\{E_n \mid n\in N^*\}$ halmazt.

3. Igazold, hogy bármely $a,b\in(1,\infty)$ esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:
$$\frac{1}{\sqrt{1+\log_a\sqrt{b}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\log_b a^2}}\le\sqrt{2}.$$
4. Az ABCD paralelogrammában az AB és AC mint oldakkal ABE egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk a paralelogramma külső tartományában, illetve BCF egyenlő oldalú háromszöget a paralelogramma belseje felé . Ha az E, D F pontok kollineárisak igazold, hogy ABCD rombusz.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a XI-a

1. Se dau șirurile $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k}$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, $k \in N$ și vectorul $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$, unde $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ și $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Determinați vectorul $\vec{u}$ care are proprietățile: $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ și $m(\widehat{\vec{u},\vec{j}}) < \frac{\pi}{2}$.

2. Fie matricea A = $\begin{pmatrix} 2 & 2017 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Să se determine matricea $X \in M_2(R)$ pentru care avem $X^{2017} + X = A$.

3. Fie șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+2n+1}$, $n \geq 1$.

   a) Să se arate că: $\frac{2n+1}{(n+1)^2} \leq x_n \leq \frac{2n+1}{n^2+1}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

   b) Calculați limita șirului $\lim_{n\to\infty} x_n$.

   c) Calculați*:* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right)$

4. a.) Calculați limita: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)^x$.

   b.) Să se determine funcția $f : R - \{0, 1\} \to R$ care verifică condiția:

   $f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2 - 2x$.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Barem de corectare

SUBIECTUL I

Se dau șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$, definite prin $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\ldots+k}$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2+1}{k^2(k+1)^2}$ și vectorul $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$, unde $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ și $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Determinați vectorul $\vec{u}$ cu proprietățile: $\vec{u} \perp \vec{v}, \|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ și $m\sphericalangle(\vec{u}, \vec{j}) < \frac{\pi}{2}$.

prof.dr. Doina Muntean, Satu Mare

2p	$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k}$, $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} = 1 + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{2}{n\cdot(n+1)} =$ $1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 2 \Rightarrow a = 2$
2p	$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} b_n = 1 \Rightarrow b = 1$
2p	$\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ Fie $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow 2\alpha + \beta = 0$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 5$, Din sistemul $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1$ și $\beta = -2$ sau $\alpha = -1$ și $\beta = 2$.
1p	$m(\widehat{\vec{u},\vec{j}}) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u},\vec{j}}) > 0$ Dacă $\alpha = 1$ și $\beta = -2 \Rightarrow \vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{j} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{j}\|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{j}}) = 1\cdot\sqrt{5}\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{j}})$. De asemenea, $\vec{u}\cdot\vec{j} = (\vec{i} - 2\vec{j})\cdot\vec{j} = -2 \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u},\vec{j}}) < 0$ (1) Dacă $\alpha = -1$ și $\beta = 2 \Rightarrow \vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{j} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{j}\|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{j}}) = \sqrt{5}\cdot 1\cdot$ $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{j}})$. De asemenea, $\vec{u}\cdot\vec{j} = (-\vec{i} + 2\vec{j})\cdot\vec{j} = 2 \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u},\vec{j}}) > 0$(2) Din (1) și (2) $\Rightarrow \vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

SUBIECTUL II

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2017 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $X \in M_2(R)$, care satisface relația $X^{2017} + X = A$.

prof. Kovacs Bela, Satu Mare

3p	Egalitatea dată se înmulțește din stânga și din dreapta cu matricea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, și folosind egalitatea AX = XA, rezultă că $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$
2p	Demonstrăm că $X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$, apoi din relația problemei rezultă $a^{2017} + a = 2$ și $2017a^{2016}\cdot b + b = 2017$

2p	Singura soluție a primei ecuații este a = 1, iar din a doua ecuație obținem b = $\frac{2017}{2018}$.

SUBIECTUL III

Fie șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+2n+1}$, $n \geq 1$.

d) Să se arate că: $\frac{2n+1}{(n+1)^2} \leq x_n \leq \frac{2n+1}{n^2+1}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

e) Calculați limita șirului $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

f) Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right)$

prof. Kovacs Bela, Satu Mare

2p	a) Termenul general al șirului dat este o sumă cu 2n+1 termeni, care se va majora respectiv minora prin micșorarea respectiv mărirea numitorului
2p	b) Aplicăm teorema cleștelui și obținem că șirul este convergent și are limita 0.
3p	c) Limita a doua tot pe baza teoremei cleștelui este egală cu 2.

SUBIECTUL IV

a) Calculați limita: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)^{x}$.

b) Să se determine funcția f : R – {0 , 1} → R care verifică condiția:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2 - 2x \ .$$

prof. Kovacs Bela, Satu Mare

3p	a.) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x(x-1)}\right)^{\frac{x(x-1)}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x-1}} = e^2$
4p	b.) Înlocuim pe x cu $\frac{x-1}{x}$.Obținem: $f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f(x) = 2 - 2\cdot\frac{x-1}{x}$ Apoi înlocuim pe x cu $\frac{1}{1-x}$. Obținem: $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2 - 2\cdot\frac{1}{1-x}$ Adunând cele două relații, obținem:

	f(x) + $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ + $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ + f(x) = 2 – 2$\cdot\frac{x-1}{x}$ + 2 – 2$\cdot\frac{1}{1-x}$ Utilizăm relația dată, urmează: 2f(x) + 2 – 2x = 2 – 2$\cdot\frac{x-1}{x}$ + 2 – 2$\cdot\frac{1}{1-x}$ Din care rezultă relația: f(x) = x + $\frac{1}{x}$ + $\frac{1}{x-1}$ ceea ce satisface relația cerută.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SATU MARE

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a XI-a

1. Adottak az $(a_n)_{n\ge1}$ és $(b_n)_{n\ge1}$, sorozatok úgy, hogy $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+...+k}$, $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ és a $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}$ vektor, ahol $a=\lim_{n\to\infty}a_n$ és $b=\lim_{n\to\infty}b_n$. Határozd meg az $\vec{u}$ vektort úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek: $\vec{u}\perp\vec{v},\ \|\vec{u}\|=\sqrt{5}$ és $m(\angle(\vec{u},\vec{j}))<\frac{\pi}{2}$.

2. Adott az A = $\begin{pmatrix}2 & 2017\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ mátrix. Határozd meg az $X\in M_2(R)$ mátrixot, amelyre $X^{2017}+X=A$.

3. Adott az $x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+2n+1}$, $n\ge1$ sorozat.

   a) Igazold, hogy: $\frac{2n+1}{(n+1)^2}\le x_n\le\frac{2n+1}{n^2+1}$, bármely $n\ge1$ esetén.

   b) Határozd meg $\lim_{n\to\infty}x_n$ határértéket.

   c) Számítsd ki: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)$.

4. a.) Számítsd ki: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)^x$ határértékét.

   b.) Határozd meg az $f:R-\{0,1\}\to R$ függvényt, amely teljesíti a következő összefüggést:

   $f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2-2x$.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a XII-a

1. a) Calculaţi derivata funcţiei $g: R \to R, g(x) = \dfrac{e^{arctgx}(x^2+ax+b)}{x^2+1}$, unde $a, b \in R$.

   b) Calculaţi: $\int e^{e^{x^2}+x^2+\ln x}dx,\ x \in (0,\infty)$

   c) Calculaţi: $\int \dfrac{(x+2)e^{arctgx}}{(x^2+1)^2}dx,\ x \in (0,\infty)$.

2. Pentru fiecare $n \in N, n \geq 2,$ se consideră $I_n = \int \sqrt[n]{x^{n^2}+x^{n^2-n}}\,dx, x \in (0,\infty)$

   a) Calculaţi I_2

   b) Calculaţi I_n, $n \geq 2$.

3. Fie $a,b\in\mathbf{R}$ fixate şi $a^2+b^2\neq 0$. Considerăm mulţimea:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ax & 1 & 0 \\ a^2x^2+bx & 2ax & 1 \end{pmatrix} \middle| \ x \in R \right\} \subset M_3(R)$$

a) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $M_3(R)$ în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Demonstraţi că $(G,\cdot)$ este grup abelian izomorf cu grupul $(\mathbf{R},+)$.

4. Fie $f: [0,1] \to R$ o funcţie derivabilă, cu proprietăţile f(0)=0, f(1)=1 şi $f'(x) \geq 1, \forall x \in [0,1]$.

a) Arătați că există o funcție f cu proprietățile date.

b) Să se demonstreze că $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)+1}dx \leq \frac{\pi}{4}$.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!

Barem de corectare

SUBIECTUL I	
	a) Calculaţi derivata funcţiei g: **R**$\to$**R**, g(x)=$\dfrac{e^{arctgx}(x^2+ax+b)}{x^2+1}$, unde $a,b\in R$. b) Calculaţi: $\int e^{e^{x^2}+x^2+\ln x}dx,\ x\in(0,\infty)$ c) Calculaţi: $\int \dfrac{(x+2)e^{arctgx}}{(x^2+1)^2}dx,\ x\in(0,\infty)$. prof. Tămâian Traian
2p	a) $g'(x)=\dfrac{e^{arctgx}[(1-a)x^2+(a-2b+2)x+a+b]}{(x^2+1)^2}$
2p	b) Integrala se scrie I= $\int e^{e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot e^{\ln x}dx=\int xe^{e^{x^2}}\cdot e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int(e^{x^2})'e^{e^{x^2}}dx=\frac{1}{2}\int(e^{e^{x^2}})'dx=\frac{1}{2}e^{e^{x^2}}+C,\ C\in R.$
2p	c)Fie f: **R**$\to$**R**, f(x)= $\dfrac{(x+2)e^{arctgx}}{(x^2+1)^2}$ .Căutăm o primitivă de forma F(x)=$\dfrac{e^{arctgx}(x^2+ax+b)}{x^2+1}$, unde $a,b\in R$. Folosind a) avem $F'(x)=\dfrac{e^{arctgx}[(1-a)x^2+(a-2b+2)x+a+b]}{(x^2+1)^2}$.
1p	Punând condiţia $F'(x)=f(x),\forall x\in R$ şi identificând coeficienţii rezultă a=b=1 şi deci I=$\dfrac{e^{arctgx}(x^2+x+1)}{x^2+1}+C,\ C\in R.$
SUBIECTUL II	
	Pentru fiecare $n\in N, n\geq 2,$ se consideră $I_n=\int\sqrt[n]{x^{n^2}+x^{n^2-n}}dx, x\in(0,\infty)$ a) Calculaţi I_2 b) Calculaţi $I_n, n\geq 2.$ prof. Tămâian Traian
3p	a) Avem $I_2=\int\sqrt{x^4+x^2}dx=\int x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)'dx=\dfrac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}+C, C\in R.$
2p	b) Integrala se scrie $I_n=\int\sqrt[n]{x^{n^2-n}(x^n+1)}dx=\int(x^n+1)^{\frac{1}{n}}\cdot x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\int(x^n+1)^{\frac{1}{n}}\cdot(x^n+1)'dx=$
2p	$=\dfrac{1}{n}\dfrac{(x^n+1)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}+C=\dfrac{(x^n+1)^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}+C, C\in R.$

<table>
<tr><td colspan="2">

SUBIECTUL III

Fie $a,b\in\mathbf{R}$ fixate şi $a^2+b^2\neq 0$. Considerăm mulţimea:

$$G=\left\{\left.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ ax & 1 & 0\\ a^2x^2+bx & 2ax & 1\end{pmatrix}\right| x\in R\right\}\subset M_3(R)$$

a) Demonstraţi că G este parte stabilă a lui $M_3(R)$ în raport cu înmulţirea matricelor.

b) Demonstraţi că (G,·) este grup abelian izomorf cu grupul (**R**,+).

***

</td></tr>
<tr><td>**1p**</td><td>

a) Dacă $X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ ax & 1 & 0\\ a^2x^2+bx & 2ax & 1\end{pmatrix}\in G$ şi $Y=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ ay & 1 & 0\\ a^2y^2+by & 2ay & 1\end{pmatrix}\in G$

$\Rightarrow X\cdot Y=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a(x+y) & 1 & 0\\ a^2(x+y)^2+b(x+y) & 2a(x+y) & 1\end{pmatrix}\in G$. Deci G este parte stabilă a lui $M_3(R)$.

</td></tr>
<tr><td>**2p**</td><td>

b) G_1) Înmulţirea matricelor este asociativă $\Rightarrow$ (XY)Z = X(YZ), $(\forall)$ X,Y,Z$\in$G.
G_2) Există $I_3\in G$ a.î. $X\cdot I_3=I_3\cdot X=X$, $(\forall)$ X$\in$G.

</td></tr>
<tr><td>**2p**</td><td>

G_3) Pentru orice $X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ ax & 1 & 0\\ a^2x^2+bx & 2ax & 1\end{pmatrix}\in G$

$\Rightarrow (\exists)X^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ ax & 1 & 0\\ a^2x^2+(-b)x & 2ax & 1\end{pmatrix}\in G$ (căci detX=1$\neq$ 0), astfel încât $X\cdot X^{-1}=X^{-1}\cdot X=I_3$.

G_4) X·Y = Y·X, $(\forall)$ X,Y$\in$G. Rezultă că (G,·) grup abelian

</td></tr>
<tr><td>**2p**</td><td>

Funcţia f: G $\to$ **R**, f(X) = x, unde X este matricea de mai sus, satisface condiţiile: i) f(X·Y) = f(X)+f(Y), $(\forall)$ X,Y$\in$G. ii) f bijectivă. Rezultă că (G,·)$\simeq$(**R**,+).

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

SUBIECTUL IV

Fie $f:[0,1]\to R$, o funcţie derivabilă , cu proprietăţile $f(0)=0$, $f(1)=1$ şi $f'(x)\geq 1, \forall x\in[0,1]$.

a) Arătaţi că există o funcţie f cu proprietăţile date.

b) Să se demonstreze că $\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)+1}dx\leq\frac{\pi}{4}$.

prof. Tămâian Traian

</td></tr>
<tr><td>**1p**</td><td>

a) De exemplu funcţia $f:[0,1]\to R$, $f(x)=x$.

</td></tr>
</table>

2p	b) Fie f o funcţie cu proprietăţile din enunţ. Cum $f^{/}(x)\geq 1, \forall x\in[0,1]$, rezultă că $\dfrac{1}{f^2(x)+1}\leq\dfrac{f^{/}(x)}{f^2(x)+1}, \forall x\in[0,1]$.
1p	Integrând ultima inegalitate rezultă $\int_0^1\dfrac{1}{f^2(x)+1}dx\leq\int_0^1\dfrac{f^{/}(x)}{f^2(x)+1}dx$ (1)
2p	Dar $\int_0^1\dfrac{f^{/}(x)}{f^2(x)+1}dx = arctgf(x)\Big\|_0^1 = arctgf(1)-arctgf(0)=arctg1-arctg0=\dfrac{\pi}{4}$. Deci $\int_0^1\dfrac{f^{/}(x)}{f^2(x)+1}dx=\dfrac{\pi}{4}$ (2)
1p	Din (1) şi (2) rezultă că $\int_0^1\dfrac{1}{f^2(x)+1}dx\leq\dfrac{\pi}{4}$.

Olimpiada Naţională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a XII-a

1. a) Számítsd ki a g: R→R, g(x)= $\dfrac{e^{arctgx}(x^2+ax+b)}{x^2+1}$ függvény deriváltját ahol $a,b \in R$.

   b) Számítsd ki $\int e^{e^{x^2}+x^2+\ln x}dx,\ x \in (0,\infty)$

   c) Számítsd ki $\int \dfrac{(x+2)e^{arctgx}}{(x^2+1)^2}dx,\ x \in (0,\infty)$.

2. Bármely $n \in N, n \geq 2$ esetén legyen $I_n = \int \sqrt[n]{x^{n^2}+x^{n^2-n}}\,dx, x \in (0,\infty)$

   a) Számítsd ki I_2-t.

   b) Számítsd ki I_n bármely n∈ N esetén.

3. Az a,b∈R rögzített számokra $a^2+b^2 \neq 0$. Tekintjük a:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ax & 1 & 0 \\ a^2x^2+bx & 2ax & 1 \end{pmatrix} \middle| \ x \in R \right\} \subset M_3(R) \text{halmazt.}$$

a) Bizonyítsd be, hogy G zárt részhalmaza $M_3(R)$-nek a mátrixok szorzására nézve.

b) Bizonyítsd be, hogy (G,·) Abel féle csoport, mely izomorf az (R,+) csoporttal.

4 Adott az $f:[0,1] \to R$ deriválható függvény melyre $f(0)=0,\ f(1)=1$ és 0
$f^{/}(x) \geq 1, \forall x \in [0,1]$.

a) Mutasd meg, hogy létezik ilyen függvény.

b) Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1 \dfrac{1}{f^2(x)+1}dx \leq \dfrac{\pi}{4}$.

Notă:

- *Timpul de lucru este de 3 ore.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.*

SUCCES!