MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

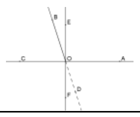
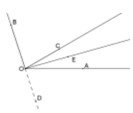
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017
CLASA a VI-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1, autor ***

Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ două a unghiuri suplementare astfel încât $4\cdot m(\sphericalangle AOB)=5\cdot m(\sphericalangle BOC)$. Aflați măsura unghiului format de dreptele OE și OD, unde $(OE$ este bisectoarea unghiului AOC și $(OD$ este semidreapta opusă semidreptei $(OB$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Din $m(\sphericalangle AOB)+m(\sphericalangle BOC)=180^0$ și $4\cdot m(\sphericalangle AOB)=5\cdot m(\sphericalangle BOC)$ rezultă $m(\sphericalangle AOB)=100^0$ și $m(\sphericalangle BOC)=80^0$	1
 Dacă unghiurile sunt adiacente avem EF bisectoarea $\sphericalangle AOC$ și $(OD$ semidreapta opusă semidreptei $(OB$, iar unghiul căutat este $\sphericalangle DOF$. Avem $m(\sphericalangle DOF)=m(\sphericalangle EOB)=m(\sphericalangle EOC)-m(\sphericalangle BOC)$ Rezultă $m(\sphericalangle DOF)=10^0$	3
 Dacă unghiurile nu sunt adiacente avem $(OE$ bisectoarea $\sphericalangle AOC$ și $(OD$ semidreapta opusă semidreptei $(OB$, iar unghiul căutat este $\sphericalangle EOD$. Avem $m(\sphericalangle EOD)=m(\sphericalangle EOA)+m(\sphericalangle AOD)$ Rezultă $m(\sphericalangle DOE)=90^0$	3

Subiectul 2 autor: Mihai Bunget, Tg. Jiu

Numerele naturale de la 1 la 25 se scriu la întâmplare în pătrățelele unui careu 5×5. Arătați că dacă produsul elementelor oricărei linii sau oricărei coloane nu se divide nici cu 50 și nici cu 46, atunci există o linie, sau o coloană, astfel încât produsul elementelor sale se divide cu 575.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$575 = 23 \cdot 5^2 = 23 \cdot 25$. Trebuie arătat că 23 și 25 se află pe aceeași linie sau coloană.	2
Linia și coloana pe care se află numărul 25 trebuie completate cu numere impare pentru ca produsul lor să nu fie divizibil cu 50 . Sunt necesare încă 8 numere impare.	1
Linia și coloana pe care se află numărul 23 trebuie completate cu numere impare pentru ca produsul lor să nu fie divizibil cu 46 . Sunt necesare încă 8 numere impare.	1
Dacă 25 și 23 nu se află nici pe aceeași linie și nici pe aceeași coloană atunci numărul numerelor impare necesare completării liniilor și coloanelor pe care se află 23 și 25 va fi egal cu 14	2
De la 1 la 25 sunt numai 13 numere impare deci 23 și 25 vor fi puse pe aceeași linie,sau pe aceeași coloană	1

Subiectul 3, autor Ion Cicu, București

Determinați numerele prime x, y și numărul natural z pentru care $x^2 + 4y + 2^z = 58$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Dacă $z = 0$ obținem $x^2 + 4y = 57$, de unde $x^2 < 57$ și x număr prim impar. Rezultă $x \in \{3,5,7\}$. Obținem soluția $x = 7, y = 2, z = 0$	2
Dacă $z = 1$ obținem $x^2 + 4y = 56$, de unde x număr prim par. Rezultă $x = 2$. Obținem soluția $x = 2, y = 13, z = 1$	2
Dacă $z \geq 2$, pentru că $4y, 2^z$ și 58 sunt numere pare, deducem $x = 2$ și relația devine $4y + 2^z = 54$. Pentru $z \geq 2$, avem 2^z este multiplu de 4 și atunci $4y + 2^z$ este multiplu de 4, iar 54 nu este multiplu de 4. Prin urmare, în acest caz, nu avem soluții.	3

Subiectul 4, autor.***

Aflați câte numere naturale n, de patru cifre, au proprietatea că $(2016, n) = 32$. Am notat (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b. (Gazeta Matematică)

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Avem $2016=2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Dacă $(2016, n) = 32$, atunci $n = 32 \cdot k$, unde k este număr natural care nu se divide nici cu 3 nici cu 7 și $1000 \leq 32k \leq 9999$	2
Aflăm numărul total de numere de forma $32k$ și $1000 \leq 32k \leq 9999 \Rightarrow k$ ia 281 de valori, rezultă că sunt 281 de numere.	1
Aflăm numărul de numere care se divid cu 3 sau cu 7 $1000 \leq 32k \leq 9999$, $k \vdots 3 \Rightarrow k$ ia 94 de valori, deci sunt 94 de numere $1000 \leq 32k \leq 9999$, $k \vdots 7 \Rightarrow k$ ia 40 de valori, deci sunt 40 de numere $1000 \leq 32k \leq 9999$, $k \vdots 21 \Rightarrow k$ ia 13 de valori, deci sunt 13 de numere Folosind principiul includerii și excluderii, avem $94 + 40 - 13 = 121$ (numere care se divid cu 3 sau cu 7)	3
Numărul de numere căutat este $281 - 121 = 160$	1