MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017 -

CLASA A VIII-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema1. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră mulțimea
$A_n=\{n^2-n+1, n^2-n+3, n^2-n+5, ..., n^2-n+(2n-1)\}$.

a) Arătați că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, suma elementelor mulțimii A_n este cub perfect;

b) Demonstrați că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, mulțimea A_n conține cel mult un pătrat perfect;

c) Determinați $m\in\mathbb{N}^*$ pentru care $2017\in A_m$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Suma elementelor din mulțimea A_n este egală cu n^3, deci este cub perfect	2p
b) Pentru $n=1$ avem $A_1=\{1\}$. Pentru $n\geq 2$ avem $(n-1)^2<n^2-n+1<n^2+n-1<(n+1)^2$, deci mulțimea A_n conține cel mult pătratul n^2. (Acest lucru se întâmplă numai pentru n impar.)	3p
c) Avem $m(m-1)+1\leq 2017\leq m(m+1)-1$. Obținem $m=45$ și $A_{45}=\{1981, 1983, ..., 2017, ..., 2069\}$	2p

Problema 2. Se consideră, la întâmplare, patru numere reale diferite. Demonstrați că, dintre aceste numere, se pot alege două numere, a și b, care au proprietatea $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|\leq 1$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Considerăm intervalele $I_1=(-\infty,-1]$, $I_2=(-1,1)$ și $I_3=[1,\infty)$. Avem $\mathbb{R}=I_1\cup I_2\cup I_3$. Conform *principiului cutiei*, există $k\in\{1,2,3\}$ astfel încât două dintre cele patru numere, notate a și b, se găsesc în I_k.	2p
Pentru numerele a și b inegalitatea din enunț este echivalentă cu $(a+b)^2\leq(1+ab)^2$ sau cu $(a^2-1)(b^2-1)\geq 0$ care este adevărată pentru oricare $k\in\{1,2,3\}$.	5p

Problema 3.

a) Arătați că $(5m+3n+2p)^2+(5n-3m)^2+(3p-2n)^2+(2m-5p)^2\geq 1444$, oricare ar fi m, n și p numere naturale prime diferite.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5\sqrt{x+y}+3\sqrt{1-x}+2\sqrt{37-y}=38$.

Prelucrare Gazeta matematică nr.6-7-8/ 2014

Detalii rezolvare	Barem asociat

a) Efectuând calculele din membrul stâng obţinem identitatea $(5m+3n+2p)^2+(5n-3m)^2+(3p-2n)^2+(2m-5p)^2=38(m^2+n^2+p^2)$. (valabilă, de fapt pentru oie numere reale m, n şi p). Deoarece m, n şi p sunt numere prime diferite, avem $38(m^2+n^2+p^2)\geq 38\cdot(2^2+3^2+5^2)=1444$. Obţinem concluzia.	**2p**
b) Folosind identitatea generală de la ***a)*** obţinem $(5a+3b+2c)^2\leq 38(a^2+b^2+c^2)$ **(1)** pentru oricare numere reale a, b, c cu egalitate pentru $(a,b,c)=(5,3,2)$.	**2p**
Luăm $a=\sqrt{x+y}, b=\sqrt{1-x}$ şi $c=\sqrt{37-y}$ şi obţinem $a^2+b^2+c^2=38$. Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $(5a+3b+2c)^2=38(a^2+b^2+c^2)$ şi, pe baza relaţiei **(1)** deducem $(a,b,c)=(5,3,2)$. Obţinem $(x,y)=(-8,33)$.	**3p**

Problema 4. Se consideră patrulaterul $ABCD$ în care $AB=AD$ şi $m(\widehat{ABC})=m(\widehat{ADC})=90^\circ$.

Fie $E\in(BC)$ şi $F\in(DC)$ astfel încât $BF\perp AE$.

a) Arătaţi că $m(\widehat{EAF})<m(\widehat{BAE})+m(\widehat{DAF})$;

b) Fie $\{H\}=DE\cap BF$ şi d dreapta care conţine punctul H şi este perpendiculară pe planul (ABC). Arătaţi că există un punct V situat pe dreapta d, $V\neq H$, astfel încât $VA=VB$ şi $VE\perp VF$.

Prof. Mircea Fianu

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Vom demonstra mai întâi că $AF\perp DE$. Pentru aceasta folosim *lema*: Un patrulater $XYZT$ este ortodiagonal dacă şi numai dacă $XY^2-XT^2=ZY^2-ZT^2$.. Avem: $FE^2-FD^2=FE^2-(AF^2-AD^2)=AD^2-(AF^2-FE^2)=AB^2-(AB^2-BE^2)=BE^2$.(*) Dar $AE^2-AD^2=AE^2-AB^2=BE^2$. Deducem că patrulaterul $AEFD$ este ortodiagonal, deci $AF\perp DE$. Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, iar unghiul $\widehat{AED}$ este interior cercului circumscris patrulaterului, deci $m(\widehat{AED})>m(\widehat{ABD})$. Obţinem $90^\circ-m(\widehat{AED})<90^\circ-m(\widehat{ABD})$, adică $m(\widehat{EAF})<m(\widehat{BAC})=\frac{1}{2}\cdot m(\widehat{BAD})$. Cum $m(\widehat{EAF})+m(\widehat{BAE})+m(\widehat{DAF})=m(\widehat{BAD})$, rezultă concluzia.	**3p**
b) Rotim punctul B în jurul dreptei AE şi rotim punctul D în jurul dreptei AF până aceste puncte se suprapun într-un punct V. Acest lucru este posibil deoarece $AB=AD$ şi $m(\widehat{EAF})<m(\widehat{BAE})+m(\widehat{DAF})$. Ultima relaţie ne confirmă că $V\notin(ABC)$, deci $V\neq H$.	**1p**
Vom arăta că $VH\perp(ABC)$, deci $V\in d$. Punctul H este ortocentrul triunghiului AFE. Triunghiurile AVE şi ABE precum şi AVF şi ADF sunt respectiv congruente. Deducem că $AV\perp VE$ şi $AV\perp VF$. Din relaţiile (*) deducem că $FE^2-FV^2=VE^2$, deci triunghiul VEF este dreptunghic în V. Ca urmare tetraedrul $VAEF$ este tridreptunghic în V şi $VH\perp(ABC)$.	**1p** **2p**