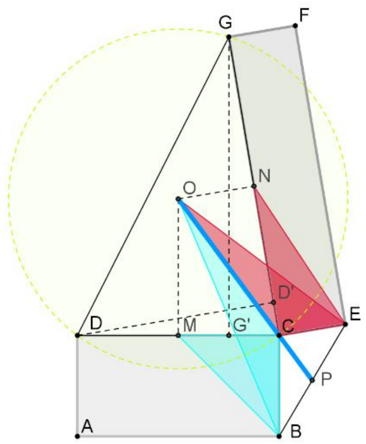
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017
CLASA a VII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

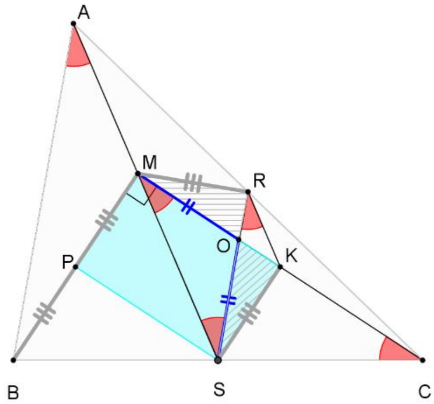
1. $ABCD$ și $CEFG$ sunt dreptunghiuri cu un punct comun și interioarele disjuncte. Laturile CD și CG formează $\measuredangle DCG$, $m(\measuredangle DCG) < 90^\circ$. Arătați că dacă $GG' \perp DC$, $G' \in DC$, $DD' \perp CG$, $D' \in CG$ și $\frac{GG'}{BC} = \frac{DD'}{CE}$, atunci mediana din C a triunghiului CBE trece prin centrul cercului circumscris $\triangle DCG$.

Autor: Mihaela Berindeanu

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$O =$ centrul cercului circumscris $\triangle DCG$ $OM \perp CD,\ ON \perp CG$ $P =$ mijlocul segmentului BE $\frac{GG'}{BC} = \frac{DD'}{CE} = k$ Demonstrarea echivalenței $\sigma(ABCD) = \sigma(CEFG)$ $\sigma(ABCD) = AB \cdot BC = \frac{AB \cdot GG'}{k} = \frac{2\sigma(DCG)}{k}$ $\sigma(CGFE) = GC \cdot CE = \frac{GC \cdot DD'}{k} = \frac{2\sigma(DCG)}{k}$  	2 p.
$OM \perp CD \Rightarrow DM = MC$ $ON \perp CG \Rightarrow CN = NG$ $\sigma(MBC) = \sigma(OBC) = \frac{\sigma(ABCD)}{4}$ $\sigma(NCE) = \sigma(OCE) = \frac{\sigma(CEFG)}{4}$	2 p.
$\Rightarrow \sigma(OBC) = \sigma(OCE)$	1 p.
$CP =$ mediană în $\triangle CBE \Rightarrow \sigma(CPB) = \sigma(CPE)$	1 p.
Finalizare $OP =$ mediană în $\triangle OBE \Rightarrow O, C, P =$ coliniare	1 p.

2. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și S mijlocul laturii BC. Pe segmentul AS se ia punctul M astfel încât $m(\measuredangle BMC)=90^\circ$ și $m(\measuredangle BAS)=m(\measuredangle MCS)$. Dacă R este mijlocul laturii AC arătați că $MB=2MR$.

Autor: Mihaela Berindeanu

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$P\in BM$, $BP=PM$ $K\in MC$, $MK=KC$ $PSKM$ = dreptunghi  	1 p.
RK și RS = linii mijlocii $\Rightarrow \measuredangle BAS=\measuredangle SRK$	1 p.
MS = mediană în triunghiul dreptunghic $BCM \Rightarrow \measuredangle SMC=\measuredangle SCM$	1 p.
$MC\cap RS=\{O\}$ $SM \parallel RK \Rightarrow \measuredangle KRS=\measuredangle RSM$ $\triangle OMS$ și $\triangle ORK$ sunt isoscele	2 p.
Finalizare $\triangle OMR\equiv\triangle OSK \Rightarrow MR\equiv SK=\dfrac{MB}{2}$	2 p.

3. Demonstrați că dacă numărul natural $a\geq 2$ este pătrat perfect, atunci numărul $\sqrt{a^3-1}$ este irațional.

Autor: Ion Voicu, GM 3/2016, E14981

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$n\in\mathbb{N}$ și $\sqrt{n}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{n}\in\mathbb{N}$	1 p.
Presupunând $a\geq 2$ pătrat perfect și $\sqrt{a^3-1}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists k\in\mathbb{N}$ pentru care $a^3-1=k^2$	1 p.
$a=b^2\Rightarrow b^6-1=k^2\Rightarrow(b^3-k)(b^3+k)=1$	2 p.
$\Rightarrow b^3-k=b^3+k=1$	1 p.
Finalizare	2 p.

4. Fie mulțimea $A=\{1,2,3,...,100\}$. Fiecare element al mulțimii este colorat în roșu, albastru, verde sau galben. Arătați că există $a,b\in A$ astfel încât a,b și $|b-a|$ să fie de aceeași culoare.

Olimpiada Mexic, 2005

Detalii rezolvare	Barem asociat
Notez cu r_i, a_j, v_k, g_l fiecare element de culoare roșie, albastră, verde, galben. Cum 100 : 4 = 25, înseamnă că există cel puțin 25 de elemente roșii r_i, pe care le scriu în ordine crescătoare $r_1 < r_2 < ... < r_{25}$	2 p.
Cu cele 25 de elementele r_i formez 24 de diferențe $r_{25} - r_1,\ r_{25} - r_2,\ ...,\ r_{25} - r_{24}$ Rezultatul acestor diferențe sunt 24 de numere (elemente) colorate în albastru, verde sau galben. Cum 24 : 3 = 8, înseamnă că există cel puțin 8 elemente albastre a_j, pe care le scriu în ordine crescătoare $a_1 < a_2 < ... < a_8$	1 p.
Cu elementele a_j formez 7 diferențe $a_8 - a_1,\ a_8 - a_2,\ ...,\ a_8 - a_7$ diferențele între elementele albastre $a_8 - a_1,\ a_8 - a_2,\ ...,\ a_8 - a_7$ coincid cu diferențele între elementele roșii $r_{25} - r_1,\ r_{25} - r_2,\ ...,\ r_{25} - r_{24}$	1 p.
Rezultatul celor 7 diferențe sunt 7 numere (elemente) colorate în verde sau galben. Dintre acestea, cel puțin 4 sunt de culoare verde $v_1 < v_2 < v_3 < v_4$	1 p.
Cu elementele v_k formez 3 diferențele $v_4 - v_1,\ v_4 - v_2,\ v_4 - v_3$, care coincid cu diferențe roșii $r_{25} - r_1,\ r_{25} - r_2,\ ...,\ r_{25} - r_{24}$ sau albastre $a_8 - a_1,\ a_8 - a_2,\ ...,\ a_8 - a_7$. Există deci trei elemente $g_1 < g_2 < g_3$ și din cele două diferențe $g_3 - g_1,\ g_3 - g_2$ posibile rezultatul uneia coincide cu diferențe între elementele roșii, albastre și verzi.	2 p.