

Olimpiada de Matematică

Etapa pe școală – ianuarie 2017

clasa a - VII - a

1. Se consideră numerele raționale  $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016}$  și

$$b = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017}.$$

(3p) a) Comparați numerele  $a$  și  $b$ .

(4p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor raționale pozitive ecuația  $|x - b| = a$ .

2. (3p) a) Determinați numerele raționale  $x$  și  $y$  ce satisfac egalitatea:

$$(5 + 2\sqrt{2}) \cdot x + (1 - \sqrt{2}) \cdot y = 4 + 3\sqrt{2}.$$

(4p) b) Fie  $m, n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2009}$ . Arătați că  $\sqrt{\left(\frac{m}{41} - 49\right) \cdot \left(\frac{n}{41} - 49\right)} \in \mathbb{N}$ .

3. Fie trapezul ABCD,  $AB \parallel CD$ ,  $AB > CD$ ,  $AB = 2 \cdot AD = 2 \cdot CD$ , M mijlocul lui [AB],

$$AC \cap DM = \{N\}, \quad MC \cap BD = \{P\}.$$

(4p) a) Stabiliți natura triunghiului ABC.

(3p) b) Arătați că  $A_{PMB} = \frac{1}{6} \cdot A_{ABCD}$ .