TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Tehnologic*
09.12.2016

Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic toate calificările profesionale
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Verificați dacă $\hat{3}$ este soluția ecuației $\hat{2}x+\hat{3}=\hat{1}, x \in \mathbb{Z}_4$

5p **2.** Fie legea de compoziție $*: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x*y = x+y+xy$. Să se calculeze $5*(-4)$

5p **3** Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compozitie $x*y = x+y+2$. Să se determine elementul neutru al acestei legi.

5p **4.** Să se calculeze $\int_1^2 \frac{2x^2+x+1}{x}dx$.

5p **5.** Să se calculeze $\int \frac{lnx}{x}dx$.

5p **6.** Fie funcțiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+3x^2+2, F(x) = e^x+x^3+2x-1$. Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f .

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă
$x*y = xy-5x-5y+30$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=(x-5)(y-5)+5, \forall x,y \in R$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=x$.

5p **c)** Să se calculeze $1*2*3*...*2017$.

2. Se dă mulțimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & x-1\\ 0 & x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}^*\right\}$

5p **a)** Arătați că $I_2 \in G$

5p **b)** Să se verifice că $A(x)\cdot A(y)=A(xy), (\forall)x,y\in\mathbb{R}^*$;

5p **c)** Calculați $A(1)\cdot A(2)\cdot ...\cdot A(5)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x+3\sqrt{x}$

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (f(x)-3\sqrt{x})d(x) = \frac{23}{6}$

5p **b)** Determinați primitiva funcției $f(x)$,pentru care $F(0)=1$

5p **c)** Arătați că orice primitivă a funcției $f(x)$ este crescatoare pe $(0,\infty)$.

2. Se consideră integralele $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze I_0.

5p **b)** Să se determine I_1.

5p **c)** Să se arate că $I_n+nI_{n-1}=2^n e^2-e, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Ştiinţe ale naturii*
09.12.2016

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale naturii
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se rezolve ecuația $\hat{2}x + \hat{3} = \hat{1}, x \in \mathbb{Z}_4$.

5p **2.** Fie legea de compoziție $\circ : \mathbb{C} \, X \, \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \circ y = x + y - 2i$, calculați $(i+2) \circ (i-1)$.

5p **3.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție „∗” definită prin $x * y = xy - 2x - 2y + 6, \forall x, y \in \boldsymbol{R}$. Știind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinați simetricul lui 5 în raport cu legea dată.

5p **4.** Calculaţi: $\int_1^2 \frac{2x^5 - 5x^2 + 7}{x^3} dx$.

5p **5.** Arătaţi că funcţia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}}$ este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

5p **6.** Să se calculeze $\int \frac{lnx}{x(1 + ln^2 x)} dx$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie : $x * y = xy + 7x + 7y + 42, \forall x, y \in R$.

5p **a)** Să se demonstreze egalitatea $x * y = (x+7)(y+7) - 7, \forall x, y \in R$

5p **b)** Să se rezolve ecuaţia $x * (x+1) = -7, x \in R$.

5p **c)** Să se calculeze $(-9) * (-8) * \cdots * 8 * 9$.

2. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2016^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbf{R}$ şi mulţimea

$$G = \{A_x | x \in \mathbf{R}\} \subset M_3(\mathbf{R}).$$

5p **a)** Să se verifice că $I_3 \in G$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5p **b)** Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

5p **c)** Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția f: ℝ→ℝ , $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1}, pentru\ x \le 0\\ -2x+1, pentru\ x>0\end{cases}$

5p **a)** Arătaţi că funcţia f admite primitive pe ℝ.

5p **b)** Arătați că primitiva *F(x)* a functiei *f(x)* este strict crescatoare pe (-∞,0)

5p **c)** Determinați acea primitivă $F_1(x)$ a lui *f(x)* care indeplineste conditia $F_1(0) = 1$.

2. Se consideră funcția $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x)=(3x+1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x)dx=\frac{5}{2}$

5p **b)**Determinați numărul real *m*, pentru care funcția $F\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, F(x)=(3x+m)e^x$este o primitivă
. a functiei *f*.

5p **c)** Determinați numărul real nenul *a*, știind că $\int_0^a f(x)dx=3a$.

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I

Clasa a XII-a *Matematică-informatică*

09.12.2016

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se calculeze $\hat{4}^{2016}$ în Z_5.

5p **2.** Pe mulţimea $M=(0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=x^{5\ln y}, \forall x,y\in M$
Calculaţi $2*e+e*2$.

5p **3.** Pe mulțimea numerelor întregi se consideră legea de compoziție $*: Z\to Z$, $x*y=xy-5x-5y+30$, cu elementul neutru $e=6$. Arătaţi că 1 nu are simetric în raport cu legea dată.

5p **4.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{e^x}{5} & ,x\le 0\\ x\cdot\cos x+\frac{1}{5}, & x>0\end{cases}$. Arătaţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **5.** Calculaţi $\int_0^1 \frac{x^2}{2-x^2}dx$.

5p **6.** Calculaţi $\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră legea de compoziţie$\circ$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\circ y=2xy-x-y+1, \forall x,y\in R$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}, \forall x,y\in R$.

5p **b)** Ştiind că legea "$\circ$" este asociativă, calculaţi $\left(-\frac{1}{7}\right)\circ\left(-\frac{1}{6}\right)\circ\ldots\circ\left(\frac{1}{6}\right)\circ\left(\frac{1}{7}\right)$.

5p **c)** Pe mulţimea numerelor reale, rezolvaţi ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x=13$.

2. Se consideră mulţimea M=$\left\{A(x)\in M_3(R)/A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, x\in R\right\}$

5p **a)** Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, x şi $y\in R$.

5p **b)** Să se arate că $(A(x))^{-1}\in M$ pentru orice $A(x)\in M$

5p **c)** Demonstraţi că grupurile $(M,\cdot)$ şi $(R,+)$ sunt izomorfe.

Mate.info.ro
profu' de mate

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

5p **a)** Să se determine o primitivă F a lui f cu proprietatea că $F(e^{e-1})=2$.

5p **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze suma $F(\sqrt{e})+F(\sqrt[3]{e})+F(\sqrt[4]{e})+.....+F(\sqrt[11]{e})$, unde F este determinată la punctul a.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi funcţiile $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_a(x)=\frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ şi $F_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$F_a(x)=\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$$

5p **a)** Să se arate că funcţia F_a este o primitivă a funcţiei f_a, $\forall a\in\mathbb{R}$

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^2 f_2(x)dx$

5p **c)** Să se calculeze $\int f_1(x)F_1^2(x)dx$

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

B A R E M
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Tehnologic - 09.12.2016*

- **Pentru orice solutie corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvari partiale, in limitele punctajului indicat in barem.**
- **Se acorda 10 puncte din oficiu. Nota finala se calculeaza prin impartirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1	$\hat{2}\cdot\hat{3}+\hat{3}=\widehat{6+3}$ $=\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_4$	3p 2p
2	$5*(-4)=5+(-4)+5\cdot(-4)=$ $=-19$	2p 3p
3	Definiția elementului neutru $x*e=x \leftrightarrow x+e+2=x \leftrightarrow e=-2$ $e*x=-2*x=-2+x+2=x$	1p 2p 2p
4	$\int_1^2 \frac{2x^2+x+1}{x}dx=2\int_1^2 \frac{x^2}{x}dx+\int_1^2 \frac{x}{x}dx+\int_1^2 \frac{1}{x}dx=$ $2\frac{2^2-1^2}{2}+2-1+ln2-ln1=4+ln2$	2p 3p
5	$lnx=t, \quad \frac{1}{x}dx=dt$ $\int \frac{lnx}{x}dx=\int tdt=\frac{t^2}{2}=\frac{ln^2x}{2}+C$	2p 3p
6	$F(x) o\ primitiva\ a\ functiei f(x), rezulta\ F'(x)=f(x)$ $F'(x)=(e^x+x^3+2x-1)'=e^x+3x^2+2$ Finalizare	1p 3p 1p

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a	$(x-5)(y-5)+5=xy-5x-5y+30$ $=x*y, \forall x,y\in R.$	3p 2p
1.b	$x*x=(x-5)(x-5)+5=(x-5)^2+5$ $(x-5)(x-6)=0, x_1=5, x_2=6.$	2p 3p
1.c	$x*5=5(1)$ $5*x=5(2)$ *Legea este asociativă(3)* *Din (1),(2),(3) rezultă că* $x*5*y=(x*5)*y=5*y=5.$	2p 2p 1p
2.a	$I_2=A(x)=\begin{pmatrix}1 & x-1\\0 & x\end{pmatrix} \Longrightarrow x-1=0 \Longrightarrow x=1\in\mathbb{R}^*$ Deci $I_2=A(1)\in G$	3p 2p
2.b	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x-1\\0 & x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y-1\\0 & y\end{pmatrix}=$	2p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

	$=\begin{pmatrix}1 & y-1+xy-y\\ 0 & xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & xy-1\\ 0 & xy\end{pmatrix}=A(xy),\ (\forall)x,y\in\mathbb{R}^*$	3p
2.c	$A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(5)=A(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)=A(120)$ $=\begin{pmatrix}1 & 120-1\\ 0 & 120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 119\\ 0 & 120\end{pmatrix}$	3p 2p

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.a	$\int_1^2 (f(x)-3\sqrt{x})dx=\int_1^2 (x^2+x)dx$ $\int_1^2 (x^2+x)dx=(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2})\Big\|_1^2$ Finalizare	1p 2p 2p
1.b	F(x)= $\int f(x)dx$ $\int (x^2+x+3\sqrt{x})dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\sqrt{x}+C$ F(0)=1 $\Rightarrow$ C=1 Finalizare	1p 2p 1p 1p
1.c	F(x) o primitiva a functiei f(x) $\Rightarrow$ F'(x)=f(x) F(x)crescatoare pe $(0,\infty)$ $\Rightarrow$ F'(x)>0 f(x)>0, $\forall x\in(0,\infty)$ Finalizare	1p 1p 2p 1p
2.a	$I_0=\int_1^2 e^x\,dx=$ Finalizare $I_0=e^2-e$	2p 3p
2.b	$I_1=\int_1^2 x\,e^x dx=\int_1^2 x\,(e^x)'dx=$ $=xe^x\,\|_1^2-\int_1^2 e^x\,dx=2e^2-e-(e^2-e)=e^2$	2p 3p
2.c	$I_n=\int_1^2 x^n\,e^x dx=\int_1^2 x^n\,(e^x)'dx=$ $=x^ne^x\,\|_1^2-n\int_1^2 x^{n-1}\,e^x dx=2^ne^2-e-nI_{n-1}.$	2p 3p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

B A R E M
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Științe ale naturii - 09.12.2016*

- **Pentru orice solutie corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvari partiale, in limitele punctajului indicat in barem.**
- **Se acorda 10 puncte din oficiu. Nota finala se calculeaza prin impartirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

Subiectul I 30 de puncte

1	Pentru fiecare valoare verificată corect câte 1 punct Precizarea soluției $\{\hat{1}, \hat{3}\}$	4p 1p
2	(i+2) ∘(i-1) = i+2+i-1-2i = 1	2p 3p
3	$x * 5 = 3$, unde x este simetricul lui 5 în raport cu legea dată $x = \frac{7}{3}$	2p 3p
4	$\int_1^2 \frac{2x^5 - 5x^2 + 7}{x^3} dx = 2\int_1^2 x^2\, dx - 5\int_1^2 \frac{1}{x} dx + 7\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$ Finalizare : $\frac{175}{24} - 5ln2$	2p 3p
5	F primitivă a lui f <=> $\int f(x)dx = F(x)$ sau $(F(x))' = f(x)$ Finalizare	2p 3p
6	$lnx = t, \ \frac{1}{x}dx = dt$ $\int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) =$ $= \frac{1}{2}\ln(1 + ln^2x) + C$	2p 2p 1p

Subiectul al II-lea 30 puncte

1.a)	$xy + 7x + 7y + 42 = (x+7)(y+7) - 7$ Finalizare	1p 4p
b)	$x*(x+1) = (x+7)(x+8) - 7$ $(x+7)(x+8) - 7 = -7$ X∈ $\{-7, -8\}$	2p 2p 1p
c)	verificare $(-7)*(x) = -7$ $(x)*(-7) = -7$ $(-9)*(-8)*\cdots*8*9$ = -7.	2p 2p 1p
2.a)	$\left.\begin{array}{l} A_0 = \begin{pmatrix} 2016^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \\ A_0 \in G \end{array}\right\} \Rightarrow I_3 \in G$	5p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

b)	$A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 2010^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2010^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2010^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} =$ $= A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R}$	3p 2p
c)	Partea stabila. Conform punctului b) $A_x \cdot A_y = A_{x+y} \in$ G, $\forall x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow$ G este parte stabilă a lui $M_3(R)$ în raport cu "·".	1p
	Asociativitatea .Înmulţirea matricelor pe mulţimea G este asociativă deoarece este operaţie indusă de înmulţirea matricelor pe $M_3(R)$. Comutativitatea: $\forall A_x, A_y \in G, A_x \cdot A_y = A_y \cdot A_x$ $\left.\begin{array}{l} A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R} \\ A_y \cdot A_x = A_{y+x} = A_{x+y} \end{array}\right\} \Rightarrow$ "· " comutativă	1p 1p
	Elementul neutru: $\exists A_0 = I_3 \in G$, conform a)	1p
	Elemente simetrizabile: $\forall A_x \in G, \exists A_{x'} \in G$ astfel încât $A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3$ $A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3 \Leftrightarrow A_{x+x'} = A_{x'+x} = A_0$ $A_{x'} = A_{-x} \in G$ este simetricul lui A_x.	1p

Subiectul al III-lea **30 puncte**

1.a)	$l_s(0) = 1, l_d(0) = 1, f(0) = 1, deci$ f continua in x=0 f continua pe $\mathbf{R} - \{0\}$ ca functii elementare, deci f continua pe **R** f admite primitive pe **R**	2p 1p 2p
b)	primitiva F(x) a functiei f(x) este strict crescatoare pe (-∞,0) daca $F'(x) = f(x) > 0$ $f(x) > 0$	2p 3p
c)	$F_1(x) = \int \frac{1}{x^2+1} dx = arctg\ x + c$ $F_1(0) = 1$ c =1 $F_1(x) = \text{arctg } x + 1$	2p 1p 1p 1p
2.a)	a) $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x) dx = \int_0^1 (3x+1) dx =$	2p 3p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

	$=\left(\frac{3x^2}{2}+x\right)\Big\vert_0^1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$	
b)	b) $F'(x)=(3x+m)'e^x+(3+m)(e^x)'=3e^x+(3x+m)e^x=(3x+m+3)e^x$ $F(x)=f(x)\Leftrightarrow (3x+m+3)e^x=(3x+1)e^x, \forall x\in \boldsymbol{R}$, deci $m=-2$	3p 2p
c)	c)) $\int_0^a (3x+1)e^x dx=(3x-2)e^x\vert_0^a=(3a-2)e^x+2$ $(3a-2)e^x+2=3a \Leftrightarrow (3a-2)(e^x-1)=0, a\in \boldsymbol{R}, a\neq 0 \Longrightarrow a=\frac{2}{3}$	3p 2p

B A R E M
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Matematică-informatică - 09.12.2016*

- **Pentru orice solutie corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvari partiale, in limitele punctajului indicat in barem.**
- **Se acorda 10 puncte din oficiu. Nota finala se calculeaza prin impartirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1	$\hat{4}^{2k+1}=\hat{4}$ $\hat{4}^{2k}=\hat{1}$ $\hat{4}^{2016}=\hat{1}$	2p 2p 1p
2	$2*e=32$ $e*2=32$ $=64$	2p 2p 1p
3	Dacă x este simetricul lui 1 , atunci $x*1=1*x=6$ $x*1=6 \leftrightarrow x=\frac{19}{4}$ nu aparține lui Z	2p 3p
4	$l_s(0)=\frac{1}{5}, l_d(0)=\frac{1}{5}, f(0)=\frac{1}{5}, deci$ f continua in x=0 f continua pe **R** –{0} ca functii elementare, deci f continua pe **R** f admite primitive pe **R**	2p 1p 2p
5	$\int_0^1 \frac{x^2}{2-x^2}dx=\int_0^1 \frac{x^2-2+2}{2-x^2}dx=-\int_0^1 1dx-2\int_0^1 \frac{1}{x^2-2}dx$ Finalizare:$-1-\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left\|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right\|$	2p 3p
6	$\cos x=t, \quad -sinx\cdot dx=dt, \; 1-sin^2x=1-t^2$ Finalizare:$-\frac{cos^3x}{3}+\frac{cos^5x}{5}+C$	3p 2p

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a	$2xy-x-y+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ Finalizare	1p 4p
1.b	verificare $\frac{1}{2}\circ x=\frac{1}{2}$ $x\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\left(-\frac{1}{7}\right)\circ\left(-\frac{1}{6}\right)\circ\ldots\circ\left(\frac{1}{6}\right)\circ\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{2}$	2p 2p 1p
1.c	Conform a) avem $2^3\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{2}=13$ $\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\right]=0$	2p 2p

	$x \in \left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$	1p
2.a	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & y\\ -y & 1 & -\frac{y^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}1 & 0 & x+y\\ -x-y & 1 & -xy-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$	2p 3p
2.b	$I_3=A(0)\in M$ Conform a) avem $A(0)=A(x-x)=A(x)\cdot A(-x)$ $(A(x))^{-1}=A(-x)\in M$	2p 1p 2p
2.c	Considerăm funcţia $f: M\to\mathbb{R}, f(A(x))=x$ f – morfism $f(A(x)A(y))=f(A(x))+f(A(y))$ Bijectivitate	1p 2p 2p

c

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a	$lnx=t,\ \frac{1}{x}dx=dt$ $\int f(x)dx=\int\frac{1}{1+t}dt=ln\|1+t\|=ln\|1+lnx\|+c$ $F(e^{e-1})=2 \Rightarrow ln\|1+lne^{e-1}\|+c=2 \Rightarrow c=1$	1p 2p 2p
1.b	$F'(x)=f(x)$ $f(x)>0, \forall x\in(1;\infty)$ F crescătoare pe $(1;\infty)$	1p 2p 2p
1.c	$F(\sqrt[n]{e})=\ ln\|1+ln\sqrt[n]{e}\|+1=ln\frac{n+1}{n}+1$ $F(\sqrt{e})+F(\sqrt[3]{e})+F(\sqrt[4]{e})+.....+F(\sqrt[11]{e})=10+ln\frac{3}{2}+\cdots+ln\frac{12}{11}=10+ln6$	2p 3p
2.a	F_a derivabilă $F_a'(x)=f_a(x)$ F_a este o primitivă a funcţiei f_a, $\forall a\in\mathbb{R}$	1p 3p 1p
2.b	Conform a) avem $\int_1^2 f_2(x)dx=F_2(x)\|_1^2$ Finalizare: $\frac{26\sqrt{5}-40\sqrt{2}}{10}$	2p 3p
2.c	$F_1(x)=t$, $f_1(x)dx=$ dt $\int f_1(x)F_1^2(x)dx=\int t^2\,dt=\frac{F_1^3(x)}{3}+C$	2p 3p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

Mate.info.ro

profu' de mate

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54