Concursul naţional de matematică

“LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a IX-a, Bucureşti, 12.11.2016

Clasa a VI-a

Soluţii şi bareme

Problema 1

Numărul natural *n* dă la împărţirea cu 9 restul nenul *r*, iar la împărţirea cu 5 dă restul 2*r*. Arătaţi că restul împărţirii lui *n* la 15 se divide cu 7.

***

Deoarece $0<2r<5$, avem $r\in\{1,2\}$. Din teorema împărţirii cu rest obţinem $n=5k_1+2r$ şi $n=9k_2+r$, unde $k_1,k_2\in\mathbb{N}$. Notăm cu M_p un multiplu oarecare al numărului natural *p*.	**2p**
Înmulţind prima relaţie cu 9 şi pe cea de adoua cu 5, apoi scăzându-le membru cu membru obţinem relaţia $4n=M_{45}+13r$ şi , cum $5n=M_{45}+5r+45r$, obţinem prin scădere, $n=M_{45}+37r=M_{15}+7r$.	**4p**
Cum $7r<15$, înseamnă că restul împărţirii lui *n* la 15 este $7r$, deci este divizibil cu 7.	**1p**

Problema 2

La un concurs de matematică au participat 30 de elevi. Fiecare dintre ei a primit spre rezolvare câte patru probleme. Dintre concurenţi, 22 au rezolvat prima problemă, 23 au rezolvat a doua problemă, 24 au rezolvat a treia problemă, iar 25 au rezolvat a patra problemă. Arătaţi că cel puţin patru elevi au rezolvat toate cele patru probleme.

***

Numărul total de probleme rezolvate de cei 30 concurenţi este $22+23+24+25=94$	**1p**
Să presupunem că numai trei concurenţi au rezolvat patru probleme. Numărul total de probleme rezolvate de aceştia ar fi $3\cdot 4=12$.	**1p**
Ceilalţi 27 concurenţi ar fi rezolvat în total cel mult $27\cdot 3=81$ probleme.	**2p**
Ca urmare, numărul total de probleme rezolvate de cei 30 de concurenţi ar fi fost cel mult $12+81=93$.	**2p**
Cum $93<94$, rezultă că există cel puţin încă un elev care a rezolvat patru probleme	**1p**

Problema 3

Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,...,15\}$ şi mulţimea $B_n=\{n+1,n+2,...,n+9\}$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Determinaţi cea mai mică valoare a lui *n* pentru care orice element din mulţimea *A* are cel puţin un multiplu în mulţimea B_n;

b) Arătaţi că există o infinitate de valori ale lui *n* pentru care orice element din mulţimea *A* are cel puţin un multiplu în mulţimea B_n.

a) Avem $15k\le n+9$, unde $k\in\mathbb{N}^*$. Pentru $k=1$, obţinem $n\ge 6$.	**1p**

Dacă $n=6$, obţinem $B_6=\{7,8,...,15\}$ care verifică ipoteza.	**1p**
b) Considerăm *M* cel mai mic multiplu comun al numerelor 1, 2, 3,...,15	**1p**
şi mulţimea $B_{M\cdot l}=\{M\cdot l+7, M\cdot l+2,...,M\cdot l+15\}$, unde $l\in\mathbb{N}$	**3p**
Mulţimile $B_{M\cdot l}$ verifică ipoteza pentru oricare $l\in\mathbb{N}$.	**1p**

Problema 4

a) Arătaţi că orice număr natural *n* are un multiplu scris în baza 10 numai cu cifrele 1 sau 0.

b) Arătaţi că orice număr natural nenul are un multiplu a cărui sumă a cifrelor este un număr impar.

a) Orice număr natural *n* are o scriere de forma $n=2^a\cdot5^b\cdot i$, unde *a* şi *b* sunt numere naturale, iar *i* este număr natural impar care nu e multiplu de 5. Prin urmare , numărul $n\cdot2^b\cdot5^a=10^{a+b}\cdot i=\overline{i\underbrace{0...0}_{a+b}}$ (1) este multiplu al lui *n*.	**1p**
Vom arăta că numărul *i* are un multiplu scris numai cu cifra 1.(2) Considerăm numerele: 1 11 111 .... $\underbrace{11...11}_{i+1}$. Cele $i+1$ numere dau cel mult *i* resturi diferite la împărţirea cu *i*. Prin urmare două dintre numere dau acelaşi rest. Scăzând cele două numere obţinem un multiplu de *i* de forma $11...100...0$. Cum $(i,10)=1$, rezultă (2).	**2p**
Cuplând cu relaţia (1), deducem că *n* are un multiplu de forma $M=\underbrace{11...1}_{p}00...0$.	**1p**
b) Pentru *p* impar , problema e rezolvată. Pentru *p* par considerăm numărul $20\cdot M-M=\underbrace{22....22}_{p}\underbrace{00...0}_{l}-\underbrace{11...1}_{p}\underbrace{0...0}_{l}=2\underbrace{11...1}_{p-2}09\underbrace{0...0}_{l}$ care este multiplu al lui *M*, deci al lui *n* şi are suma cifrelor impară.	**3p**