Concursul naţional de matematică

“LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a IX-a, Bucureşti, 12.11.20116

Clasa a VII-a

Soluţii şi bareme

Problema 1

Determinaţi toate numerele raţionale *x*, mai mari sau egale cu 0, pentru care $\frac{10x+1}{x+1}$ este un număr natural pătrat perfect.

Avem $\frac{10x+1}{x+1} > 0$.	**1p**
Fie $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\frac{10x+1}{x+1} = k^2$. Obţinem $x = \frac{k^2-1}{10-k^2} \geq 0$.	**2p**
Deoarece $k^2 \geq 1$,deducem că $10-k^2 \geq 0$, deci $k \in \{1,2,3\}$.	**2p**
Obţinem $x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 8\right\}$.	**2p**

***

Problema 2

a) Arătaţi că numărul $m = 0,(3)\cdot 0,(09) + 0,(09)\cdot 2,(285714) + 2,(285714)\cdot 0,(3)$ este natural.

b) Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul *n*, există o infinitate de triplete de numere raţionale pozitive reprezentate prin fracţii zecimale finite, (a,b,c), astfel încât $ab+bc+ca=n$.

***

a) $m = 1 \in \mathbb{N}$.	**2p**
b) Din $ab+bc+ca=n$, obţinem $c = \frac{n-ab}{a+b}$.	**1p**
Pentru numerele $a = \frac{1}{2^p}, b = \frac{1}{2^{p+2}}, p \in \mathbb{N}$, care sunt reprezentate de fracţii zecimale	**2p**
finite, obţinem $c = \frac{n\cdot 2^{2p+2}-1}{2^p \cdot 5}$, care este reprezentat de o fracţie zecimală finită.	**2p**

Problema 3

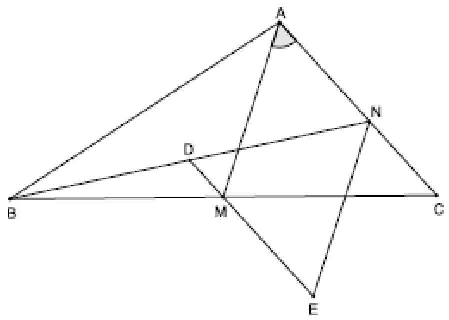
Se consideră un triunghi *ABC* în care *M* este mijlocul laturii (BC), iar $m\left(CAM\right) = 60^\circ$.

Punctul *N* este situat pe segmentul (AC) astfel încât $BN = 2AM$.

Determinaţi măsura unghiului ANB .

***

Fie D mijlocul segmentului $[BN]$. Atunci $[DM]$ este linie mijlocie în triunghiul BCN. **1p**



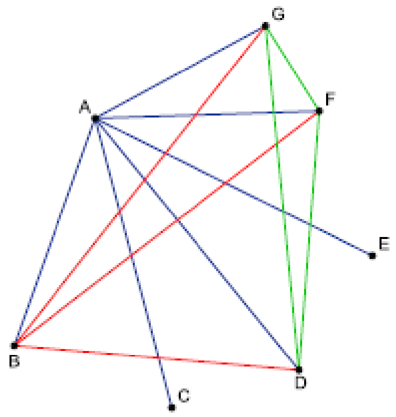
Prin urmare, $DM \parallel AC$. (1)
Paralela prin N la dreapta AM intersectează dreapta DM în punctul E. (2)
Din (1) şi (2) deducem că $AMEN$ este paralelogram, deci $EN = AM = \frac{BN}{2} = DN$. (3) **3p**

Pe de altă parte. $m(\widehat{MEN}) = m(\widehat{MAN}) = 60^\circ$.(4)
Din (3) şi (4), rezultă că triunghiul END este echilateral. Atunci $m(\widehat{EDN}) = 60^\circ$. **2p**

În final, $m(\widehat{ANB}) = m(\widehat{EDN}) = 60^\circ$ (alterne interne) **1p**

<u>Problema 4</u>

Se consideră 17 puncte diferite, trei câte trei necoliniare. Fiecare segment determinat de câte două dintre aceste puncte se colorează la întâmplare cu una din culorile: albastru, roşu sau verde. Arătaţi că, în configuraţia obţinută în final, există cel puţin un triunghi care are laturile colorate cu aceeaşi culoare.



Considerăm unul dintre cele 17 puncte, la întâmplare. Fie acesta A. A este unit cu restul punctelor prin 16 segmente. Conform principiului cutiei cel puţin 6 segmente cu un capăt în A au aceeaşi culoare, de exmplu albastră.(vezi figura) **1p**

Considerăm capătul diferit de A al unui sgment oarecare dintre cele 6. Fie acesta B. B formează cu celelalte 5 capete ale segmentelor rămase 5 segmente. Dacă vreunul dintre acestea este albastru, obţinem un triunghi cu laturi albastre. **2p**

În caz contrar, inseamnă că cel puţin trei segmente formate de B cu celalte 5 puncte au aceeaşi culoare. De exemplu roşie. Extremităţile celor trei semente obţinute, de exemplu D, F şi G, sunt deja capete atât pentru segmente albastre , precum şi pentru segmente roşii.

Deducem că, indiferent de ce culoare folosim pentru a colora segmentele determinate de cele trei puncte , vom obţine un triunghi monocolor. **4p**