Concursul naţional de matematică

“LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a IX-a, Bucureşti, 12.11.2016

Clasa a VIII-a

Soluţii şi bareme

Problema 1

a) Se consideră două numere întregi a şi b astfel încât 5 divide numărul $2a+b$. Arătaţi că 5 divide numărul a^2+b^2.

b) Arătaţi că există o infinitate de perechi de numere întregi (a,b) pentru care 5 divide numărul a^2+b^2, dar 5 nu divide numărul $2a+b$.

***

a) Avem $a-2b=3(2a+b)-5(a+b)$ care este divizibil cu 5. Prin urmare , numerele $(2a+b)^2$ şi $(a-2b)^2$ se divid cu 25. Avem $(2a+b)^2+(a-2b)^2=5(a^2+b^2)$ care se divide cu 25, de unde deducem că 5 divide numărul a^2+b^2.	**4p**
b) Considerăm numerele $a=2^p, b=2^{p+1}, p\in\mathbb{N}$. Avem $a^2+b^2=5\cdot 2^{2p}$, număr care se divide cu 5. Dar, $2a+b=2^{p+2}$, număr care nu se divide cu 5.	**3p**

Problema 2

Se consideră trei numere reale a, b şi c, mai mari sau egale cu 0, care verifică egalitatea $ab+bc+ca=1$. Demonstraţi că $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\le\frac{9}{4}$.

***

Avem $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)=3$	**2p**
$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{3+a^2+b^2+c^2}=\frac{(a+b+c)^2}{1+(a+b+c)^2}\ge\frac{3}{4}$.	**3p**
Acum $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}=3-\left(\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}\right)\le\frac{9}{4}$.	**2p**

Problema 3

Se consideră un cub şi un număr natural n care are exact opt divizori naturali. Fiecărui vârf al cubului îi asociem câte un divizor al lui n, astfel încât oricăror două vârfuri diferite ale cubului să le corespundă divizori diferiţi ai lui n. Arătaţi că există o astfel de asociere pentru care produsul celor patru numere din vârfurile oricărei feţe a cubului să fie acelaşi.

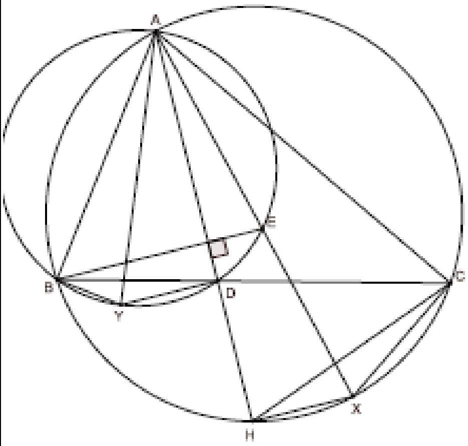
***

Numărul n poate avea una din formele: $n = p^7$, unde p este număr prim sau $n = pq^3$, unde p şi q sunt numere prime diferite.	**1p**
Considerăun cub *ABCDEFGH*. Pentru cazul $n = p^7$ facem, de exemplu, următoarea asociere: $A \to 1, B \to p^6, C \to p, D \to p^7, E \to p^5, F \to p^3, G \to p^4, H \to p^2$. Pe fiecare dintre feţele cubului produsul divizorilor este p^{14}.	**3p**
Pentru cazul $n = pq^3$, facem, de exemplu, următoarea asociere: $A \to 1, B \to pq, C \to q^2, D \to pq^3, E \to pq^2, F \to q^3, G \to p, H \to q$. Pe fiecare dintre feţele cubului produsul divizorilor este p^2q^6. *Numai pentru enumerarea divizorilor şi determinare valorii produsului numerelor din vârfurile unei feţe, fără a realiza asocierea, se acordă câte un punct în fiecare caz.*	**3p**

Problema 4

Se consideră triunghiul *ABC*, $AB < AC$. Bisectoarea unghiului *BAC* intersectează segmentul (BC) în punctul *D*. Perpendiculara din *B* pe dreapta *AD* intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului *ABD* în punctul *E*. Demonstraţi că centrul cercului circumscris triunghiului *ABC* este situat pe dreapta *AE*.

***

 Fie *H* şi *X* intersecţiile dreptelor *AD*, respectiv *AE* cu cercul (ABC). Este suficient să arătăm că $m(AHX) = 90^\circ$. Considerăm diametrul $[AY]$ al cercului (ABD). Rezultă că $YD \perp AD$, deci $YD \parallel BE$. Deducem că $YDB \equiv DBE \equiv DAE \equiv HCX$. (1)	**1p**
Pe de altă parte, $m(DYB) = m(CXH) = \frac{1}{2} \cdot m(BAC)$ (2)	**2p**
Din (1) şi (2) deducem că triunghiurile *BDY* şi *HCX* sunt asemenea, deci $m(DBY) = m(CHX)$.	**2p**
Cum $m(ABD) = m(AHC)$, rezultă, prin adunare membru cu membru, $m(ABY) = m(AHX) = 90^\circ$.	**2p**

,