Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret”, Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a IX-a, Bucureşti, 12 noiembrie 2016

Clasa a 9-a - Soluţii şi bareme orientative

1. Fie $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Arătaţi că $1 + \sqrt{5}$ nu poate fi scris în forma $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, cu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Soluţie. Presupunem $1 + \sqrt{5} = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k\sqrt{5})^2$. **1p**

Atunci $1 = \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + 5b_k^2)$ şi $1 = 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. **2p**

Deducem $\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + 5b_k^2 - 2a_k b_k) = 0$. **2p**

De aici $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)^2 + 4\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0$, ceea ce conduce la $a_k = b_k = 0$ pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ – fals. **2p**

2. Determinaţi valoarea minimă a expresiei $\dfrac{4}{4 - x^2} + \dfrac{9}{9 - y^2}$, dacă x şi y sunt numere reale pozitive mai mici decât 2 astfel încât $xy = 1$.

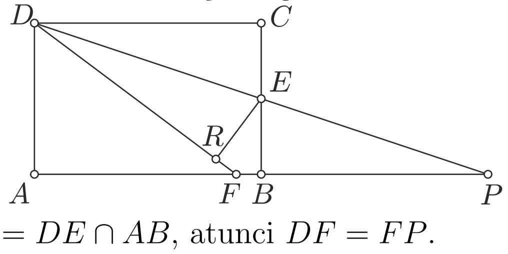
Soluţie. Avem $x^2y^2 = 1$. **1p**

Expresia este $E = \dfrac{72 - 9x^2 - 4y^2}{36 - 9x^2 - 4y^2 + x^2y^2} = \dfrac{72 - t}{37 - t} = 1 + \dfrac{35}{37 - t}$, unde $t = 9x^2 + 4y^2$. **2p**

Cum $37 - t > 0$ în condiţiile problemei, valoarea minimă se obţine dacă t este minim. **2p**

Avem $t \geq 2\sqrt{9x^2 \cdot 4y^2} = 12$, cu egalitate pentru $x = \sqrt{6}/3$, $y = \sqrt{6}/2$, deci $t_{\min} = 12$ şi $E_{\min} = 12/5$. **2p**

3. Un dreptunghi $ABCD$ are $AB = 3$, $BC = 2$. Fie E mijlocul laturii BC şi $F \in (AB)$ astfel încât $\sphericalangle CDE \equiv \sphericalangle EDF$. Determinaţi lungimea BF.



Soluţie. Dacă luăm $\{P\} = DE \cap AB$, atunci $DF = FP$. **3p**

Notând $AF = x$ obţinem $PF = 6 - x = DF$. **2p**

În ΔADF teorema lui Pitagora dă $2^2 + x^2 = (6 - x)^2$, de unde $x = 8/3$ şi $BF = 1/3$. **2p**

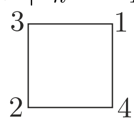
Altă soluţie. Dacă luăm $ER \perp DF$, $R \in DF$, atunci $ER = EC = EB$. **3p**

Notând $BF = y$ obţinem $RF = y$, $DF = 3 + y$. **2p**

Din ΔADF rezultă $2^2 + (3 - y)^2 = (3 + y)^2$, de unde $y = 1/3$. **2p**

4. Fie $n \geq 3$ un număr natural şi $\mathcal{P}$ un poligon regulat cu n laturi, pe care îl parcurgem în sensul mişcării acelor de ceasornic. Pentru o aşezare în vârfurile lui $\mathcal{P}$ a numerelor $1, 2, \ldots, n$ în ordinea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ notăm $S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$ (de exemplu, dacă $n = 4$ şi aşezarea este cea alăturată,

$S = |1 - 4| + |4 - 2| + |2 - 3| + |3 - 1| = 8$).



a) Determinaţi valoarea minimă a lui S.

b) Determinaţi pentru câte aşezări ale numerelor $1, 2, \ldots, n$ se obţine acest minim (două aşezări care se obţin una din alta printr-o rotaţie se consideră identice).

Soluţie. a) Arătăm că minimul este $m_n = 2n - 2$. **1p**

Dacă punem numerele în ordinea $1, 2, \ldots, n$ obţinem $S = 2n - 2$, deci $m_n \leq 2n - 2$. **1p**

Arătăm inductiv că $m_n \geq 2n-2$: cazul $n=3$ este evident, iar dacă orice sumă pentru $n-1$ numere este cel puţin $2n-4$ şi considerăm o aşezare oarecare cu n numere, n fiind între a şi b, $a>b$, atunci suma corespunzătoare este $S=2(n-a)+a-b+S' \geq 2+2n-4=2n-2$, deoarece $a-b+S'$ este o sumă pentru $n-1$ numere. **2p**

b) Raţionamentul precedent arată că pentru a obţine $S=m_n$ este necesar şi suficient ca $n-a=1$ şi $a-b+S'=m_{n-1}$, deci o aşezare pentru a obţine m_n se obţine dintr-o aşezare pentru m_{n-1}, la care îl inserăm pe n ,,lângă" $n-1$. Cum inserarea lui n se poate face în două moduri, reiese că numărul aşezărilor pentru care obţinem m_n este de două ori mai mare decât numărul aşezărilor pentru care obţinem m_{n-1}. Cum m_3 se obţine pentru cele două aşezări posibile în cazul $n=3$, rezultă că m_n se obţine pentru 2^{n-2} aşezări. **3p**