Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret”, Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ,,LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a IX-a, Bucureşti, 12 noiembrie 2016

Clasa a 10-a - Soluţii şi bareme orientative

1. Fie a, b, c, d numere întregi pozitive astfel încât $\log_a b = \dfrac{3}{2}$, $\log_c d = \dfrac{5}{4}$ şi $a - c = 9$. Determinaţi $b - d$.

Soluţie. Ipoteza este echivalentă cu $b^2 = a^3$ şi $d^4 = c^5$. **2p**

Rezultă că $a = m^2$, $c = n^2$, cu m, n naturale. **2p**

Din $(m - n)(m + n) = 9$ obţinem $m = 5$, $n = 4$, apoi $b = 125$, $d = 32$, $d - b = 93$. **3p**

2. În interiorul triunghiului ABC de arie 1 se consideră punctul O astfel încât $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$. Determinaţi aria triunghiului BOC.

Soluţie. Fie D astfel încât $2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = 5\overrightarrow{OD}$. Atunci $D \in [BC]$ (şi $BD/DC = 3/2$). **3p**

Din $\overrightarrow{OA} = -5\overrightarrow{OD}$ reiese $OD = AD/6$. **2p**

Deducem $S_{BOC} = S_{ABC}/6 = 1/6$. **2p**

3. Arătaţi că, în orice triunghi, $a \sin A + b \sin B + c \sin C \geq 9r$, unde notaţiile sunt cele uzuale.

Soluţie. Folosind teorema sinusurilor, relaţia se reduce la $a^2 + b^2 + c^2 \geq 18Rr$. **3p**

Mai departe, $Rr = abc/4S \cdot S/p = abc/(4p)$ **2p**

Inegalitatea devine $(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 9abc$, ceea ce rezultă imediat din inegalitatea mediilor. **3p**

4. Asociem fiecărui punct din plan un număr real astfel încât, pentru orice triunghi, numărul asociat centrul cercului său înscris este egal cu media aritmetică a numerelor asociate vârfurilor. Arătaţi că numerele folosite sunt egale între ele.

Soluţie. Să notăm punctele cu litere mari şi numerele asociate cu literele mici corespunzătoare.

Dacă $ABCD$ este un trapez isoscel şi laturile neparalelele se intersectează în E, atunci triunghiurile ACE şi BDE au acelaşi cerc înscris, deci $a + c = b + d$. **3p**

Considerăm un cerc oarecare $\mathcal{C}$ tangent la AC şi BD. Dacă tangentele din A şi C la $\mathcal{C}$ se taie în M, iar tangentele din B şi D la $\mathcal{C}$ se taie în N, atunci $a+c+m = b+d+n$, deci $m = n$. **2p**

Cum orice două puncte M, N se pot obţine prin construcţia precedentă, rezultă concluzia. **2p**