Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret”, Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ,,LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a IX-a, Bucureşti, 12 noiembrie 2016

Clasele 11-12 - Soluţii şi bareme orientative

1. Fie $n \geq 2$ un număr natural.

a) Determinaţi permutările din S_n care au exact o inversiune.

b) Este adevărat că orice permutare din S_n se poate scrie ca un produs de permutări având, fiecare, exact o inversiune ?

Soluţie. Să numim *mică* o permutare având exact o inversiune.

a) Observăm că transpoziţiile $(i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$ sunt permutări mici. **2p**

Arătăm că doar aceste permutări sunt mici. Fie $f \in S_n$ o permutare mică şi (i,j), $1 \leq i < j \leq n$ inversiunea sa. Atunci $f(1), \ldots, f(i-1)$, $f(i+1), \ldots, f(j-1)$ sunt $j-2$ numere mai mici decât $f(j)$, de unde $f(j) \geq j-1$. De asemenea, $f(j+1), \ldots, f(n)$ sunt $n-j$ numere mai mari decât $f(j)$, deci $f(j) \leq n-(n-j) = j$. Astfel, $j-1 \leq f(j) \leq j$. Analog obţinem $i \leq f(i) \leq i+1$. În sfârşit, din $i < j$ şi $f(i) > f(j)$ rezultă $j = i+1$ şi $f(i) = i+1$, $f(j) = j-1$. **2p**

b) Răspunsul este ,,da”; pentru aceasta este suficient să arătăm că orice transpoziţie se poate scrie ca produs de permutări mici. **1p**

Într-adevăr, dacă (i,j) se poate scrie ca produs de permutări mici, atunci $(i, j+1) = (i,j)(j,j+1)(i,j)$, deci şi $(i, j+1)$ se poate scrie ca produs de permutări mici. Aceasta, împreună cu faptul că $(i, i+1)$ este o permutare mică, probează inductiv afirmaţia de mai sus. **2p**

2. Determinaţi aria minimă a unui pătrat care are o latură pe dreapta $y = 2x - 17$ şi cu celelalte două vârfuri pe parabola $y = x^2$.

Soluţie. Vârfurile situate pe parabolă se află pe o dreaptă de pantă 2, deci au coordonatele $(-a, a^2)$ şi $(a+2, (a+2)^2)$, cu $a > 0$. **2p**

Distanţele lor la dreapta $2x - y - 17 = 0$ sunt $d = (a^2 + 2a + 17)/\sqrt{5}$, iar distanţa dintre ele este $d' = \sqrt{(2a+2)^2 + (4a+4)^2}$. **2p**

Pentru a avea pătrat trebuie $d = d'$, adică $a = 1$, sau $a = 7$. **2p**

Aria minimă se obţine pentru $a = 1$ şi este $d^2 = 80$. **1p**

3. Fie A şi B mulţimi finite de numere reale cu m, respectiv n elemente ($m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$). Determinaţi numărul funcţiilor crescătoare surjective de la A la B.

Soluţie. Fie $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_m\}$, $B = \{b_1 < b_2 < \ldots < b_n\}$ şi x_i numărul elementelor din A care au imaginea b_i, $1 \leq i \leq n$. Funcţiile sunt descrise complet de $(n-1)$-uplul $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, cu $x_i \geq 1$ şi $x_1 + \ldots + x_{n-1} < m$. **2p**

La rândul lui, un astfel de $(n-1)$-uplu este descris complet de şirul strict crescător $1 \leq y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} \leq m-1$, cu $y_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$, $1 \leq i \leq n-1$. **3p**

Deoarece numărul acestor şiruri este cel al alegerilor a $n-1$ elemente distincte dintr-o mulţime cu $m-1$ elemente, răspunsul este C_{m-1}^{n-1}. **2p**

4. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie cu proprietatea $f^{[2016]}(x) + 2015x = f(2016x)$, unde $f^{[n]} = f \circ f \circ \ldots \circ f$ de n ori, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $f(x) \geq x$, pentru orice $x \geq 0$.

Soluţie. Din ipoteză reiese că $f(2016x) \geq 2015x$, deci $f(t) \geq a_0 t$, cu $a_0 = 2015/2016$. **2p**

Atunci $f^{[2016]}(t) \geq a_0^{2016} t$, ceea ce conduce la $f(t) \geq (a_0^{2016}/2016 + a_0)t = a_1 t$, cu $a_1 = a_0^{2016}/2016 + a_0$. Obţinem inductiv $f(t) \geq a_n t$, unde $a_{n+1} = a_n^{2016}/2016 + a_0$. **3p**

Şirul $(a_n)_n$ este crescător şi subunitar, deci are o limită $l \leq 1$. Prin trecere la limită obţinem $2016l = l^{2016} + 2015$, de unde $l = 1$. În sfârşit, din $f(t) \geq a_n t, \forall n \in \mathbb{N}$ deducem $f(t) \geq t$. **2p**