PROBLEME REZOLVATE

prof.Gheorghe Crăciun

CLASA a V-a

1 *Suma a două numere este 95. Să se determine produsul celor două numere ştiind că unul dintre ele este predecesorul dublului celuilalt număr.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

Dacă x este numărul mai mic, atunci predecesorul dublului său este 2x – 1, aşadar se obţine relaţia $x + 2x – 1 = 95$, de unde $3x = 96$, adică

$x = 32$, prin urmare cele două numere sunt 32 şi 63 iar produsul lor este $32\cdot 63 = 2016$.

2 *În clasele a V-a A şi a V-a B ale unei şcoli sunt 48 elevi. Dacă se transferă 5 elevi de la clasa a V-a A la clasa a V-a B, atunci în clasa a V-a B vor fi cu 3 elevi mai mulţi decât dublul numărului care au rămas în clasa a V-a A. Să se determine numărul de elevi existent la început în fiecare clasă.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

Dacă notăm cu a şi cu b numărul elevilor existenţi în clasele a V-a A, respective a V-a B, vom avea: a + b = = 48

Dacă se transferă cei 5 elevi, în clasa a V-a A vor fi a – 5 elevi, în timp ce în clasa a V-a B vor fi b + 5 elevi si din datele problemei avem $b + 5 = 2\cdot (a – 5) + 3$, relaţie din care se obţine pe rând: $b + 5 = 2a – 10 + 3$ $b = 2a – 12$, relaţie pe care o înlocuim în $a + b = 48$ şi se obţine $3a = 60$ şi prin urmare $a = 20$ iar $b = 28$.

3 *Să se scrie în ordine crescătoare următoarele numere:*

$a = 4^{1009} - 2^{2017} – 16^{504}$, $b = 9^{673} - 3^{1345} - 5\cdot 27^{448}$; $c = 49^{337} - 5\cdot 7^{673} - 13\cdot 49^{336}$

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

Vom scrie, pe rând, numerele sub forma:

$a = (2^2)^{1009} – 2^{2017} – (2^4)^{504}$

$a = 2^{2018} – 2^{2017} – 2^{2016}$

$a = 2^{2016} \cdot (2^2 – 2 – 1)$ de unde

$a = 2^{2016} – 2^{3\cdot 672} = (2^3)^{672} = 8^{672}$

$b = (3^2)^{673} – 3^{1345} - 5\cdot (3^3)^{448}$

$b = 3^{1346} – 3^{1345} - 5\cdot 3^{1344}$

$b = 3^{1344} \cdot (3^2 – 3 – 5)$, prin urmare

$b = 3^{1344} = 3^{2\cdot 672} = (3^2)^{672} = 9^{672}$

$c = (7^2)^{337} - 5\cdot 7^{673} – 13\cdot (7^2)^{336}$

$c = 7^{674} - 5\cdot 7^{673} - 13\cdot 7^{672}$

$c = 7^{672} \cdot (7^2 - 5\cdot 7 - 13)$

$c = 7^{672} \cdot (49 – 35 – 13)$, de unde

$c = 7^{672}$

Se observa că numerele a, b, c au acelaşi exponent şi comparând bazele se obţine:

$c < a < b$.

4 Scrieți numărul $S = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 100 \cdot 101) – 5050$ ca sumă de pătrate de numere naturale.

O.L.M. Arges

$S = 1 \cdot (1 + 1) + 2 \cdot (2 + 1) + 3 \cdot (3 + 1) + ... + 100 \cdot (100 + 1) – 5050$
$S = 1^2 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + ... + 100^2 + 100 – 5050$
$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 +... + 100^2) + (1 + 2 + 3 + ... + 100) – 5050$
$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 +... + 100^2) + 5050 – 5050$ deci $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 +... + 100^2$

5 *Elevii unei clase merg pe o potecă de munte, unul ın spatele celuilalt. Când Andrei a ajuns la cabană, ın cabană se aflau deja jumătate din numărul elevilor aflați ınca pe traseu. Bianca a sosit a zecea după Andrei, iar după ea au rămas de două ori mai puțini elevi decât cei ajunși ınaintea ei la cabană. Câți elevi sunt ın acea clasă?*

O.N.M 2013

Soluție.

Să presupunem că Andrei se află pe poziția n. Atunci ınaintea lui sunt n − 1, iar ın urmă lui sunt 2n − 2 elevi. Bianca se află pe poziția n + 10. Înaintea ei sunt n + 9, iar ın urmă ei sunt(n+9)/2Numarul elevilor, raportat la Andrei, este n + 2n − 2 = 3n − 2. Numărul elevilor, raportat la Bianca, este n + 10 + (n+9)/ 2 . Obținem ecuația 3n − 2 = n + 10 + (n + 9)/2 cu soluția n = 11. Numărul de copii este 31

CLASA a VI-a

1. *Să se determine numerele x, y, z ştiind că:*

$$\frac{3x}{4y+5z}=\frac{4y}{3x+5z}=\frac{5z}{3x+4y}$$ *iar 3x + 8y + 41z = 2016.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

Adunând numărătorii la numitor, se obţine:

$$\frac{3x}{3x+4y+5z}=\frac{4y}{3x+4y+5z}=\frac{5z}{3x+4y+5z}$$, de unde 3x = 4y = 5z şi împărţind această relaţie la 60 se obţine $\frac{x}{20}=\frac{y}{15}=\frac{z}{12}$.

Notînd valoarea acestui şir de rapoarte cu k, vom găsi x = 20k, y = 15k, z = 12k şi înlocuind în a două relaţie se găseşte:

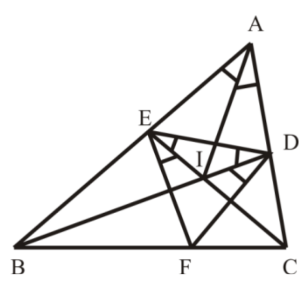
$3\cdot 20k + 8\cdot 15k + 41\cdot 12k = 2016$, sau încă

$672k = 2016$ şi prin urmare k = 3 iar x = 60, y = 45, z = 36.

2. *Fie BD, respective CE bisectoarele unghiurilor B şi C ale triunghiului ABC în care $m(\angle C) = 2\cdot m(\angle B)$. $D \in AC$, $E \in AB$. Dacă BE +CD = BC, să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:



Notăm cu I intersecţia bisectoarelor BD şi CE iar perpendiculara din E pe BD intersectează dreapta BC în F.
Deoarece Bi este bisectoarea unghiului B şi BI ⊥ EF rezultă că Δ EBF este isoscel cu [BE] ≡ [BF] şi cum BE + CD = BC rezultă că [CF] ≡ [CD].
Δ EBD ≡ Δ FBD ([BE] ≡ [BF], ∠EBD ≡ ∠ FBD, [BD] ≡ [BD]) de unde [DE] ≡ [DF], **(1)**
Δ ECF ≡ Δ ECD ([CF] ≡ [CD], ∠ECF ≡ ∠ECD, [EC] ≡ [EC]) de unde [EF] ≡ [ED] **(2)** .
Din **(1)** şi **(2)** rezultă că [DE] ≡ [EF] ≡ [DF] , aşadar triunghiul DEF este echilateral.
Din Δ EBD ≡ Δ FBD rezultă că m(∠ EDB) = m(∠FDB) = 30°.Unghiul DFC este unghi exterior triunghiului BDF, de unde
m(∠DFC) = m(∠DBF) + m(∠BDF), adică m(∠DFC) = m(∠DBF) + 30°
şi cum triunghiul CFD este isoscel rezultă că m(∠FDC) = m(∠DBF) + 30°.
În triunghiul CFD, avem:m(∠CFD) + m(∠CDF) + m(∠C) = 180°, şi înlocuind, vom obţine m(∠ DBC) + 30° + m(∠DBC) + 30° + m(∠ C) = 180°, de unde
2· m(∠DBC) + m(∠C) = 120° şi cum 2· m(∠DBC) = m(∠B) iar m(∠C) = 2·m(∠ B), se obţine 3· m(∠B) = 120°, adică m(∠B) = 40°, m(∠C) = 80° iar m(∠C) = 60°

---

3. Se consideră în **N**, ecuaţia :

$$\left(\frac{11}{7}\right)^n - \left(\frac{7}{11}\right)^n = \frac{72}{77}.$$

a) Să se arate că ecuaţia are o singură soluţie naturală ;

b) Determinaţi soluţia $n \in \mathbf{N}$, a ecuaţiei date.

Ionel Tudor,Călugăreni, Viorica Dogaru, Giurgiu

Soluţie:

a) Fie $m \neq n$, două soluţii distincte ale ecuaţiei , deci

$$\left(\frac{11}{7}\right)^m - \left(\frac{7}{11}\right)^n = \left(\frac{11}{7}\right)^n - \left(\frac{7}{11}\right)^n = \frac{72}{77}.$$

Presupunem $m > n$ şi atunci prima egalitate se scrie:

$$\left(\frac{11}{7}\right)^m - \left(\frac{11}{7}\right)^n = \left(\frac{7}{11}\right)^m - \left(\frac{7}{11}\right)^n ;$$

$$\left(\frac{11}{7}\right)^n \left[\left(\frac{11}{7}\right)^{m-n} - 1\right] = \left(\frac{7}{11}\right)^n \left[\left(\frac{7}{11}\right)^{m-n} - 1\right], \qquad (*)$$

Avem $\left(\frac{11}{7}\right)^{m-n} > \frac{11}{7} > 1 > \frac{7}{11} > \left(\frac{7}{11}\right)^{m-n}$, de unde $\left(\frac{11}{7}\right)^{m-n} - 1 > 0 > \left(\frac{7}{11}\right)^{m-n} - 1$.

Cum $\left(\frac{11}{7}\right)^n > 1 > \left(\frac{7}{11}\right)^n > 0$, egalitatea $(*)$ este imposibilă deoarece primul membru este pozitiv iar al doilea este negative.

Cazul $m < n$, se tratează analog.

b) Se observă că *n=1* , verifică ecuaţia : $\frac{11}{7} - \frac{7}{11} = \frac{121-49}{77} = \frac{72}{77}$,
deci *n=1* , este singura soluţie naturală a ecuaţieie date.

4. *Fie într-un plan* $d_1; d_2; d_3; d_4$ *patru drepte distincte concurente şi* $d_1 \cap d_2 \cap d_3 \cap d_4 = \{O\}$.

a) Justificaţi că dreptele $d_1; d_2; d_3; d_4$ *formează în jurul punctului* O *cel puţin un unghi de măsură mai mare sau egală cu* 45^0.

b) Justificaţi că cel mult două unghiuri formate de dreptele $d_1; d_2; d_3; d_4$ *în jurul punctului* O *au măsura mai mică decât* 90^0.

c) Câte unghiuri proprii se formează dacă mai construim încă o dreaptă d *în acelaşi plan?*

Observaţie. Considerăm că două drepte paralele sau confundate nu formează nici un unghi, iar două drepte concurente formează patru unghiuri.

Constantin Ursu

Soluţie:

a) În jurul punctului O se formează 8 unghiuri ce determină patru perechi de unghiuri opuse la vârf, deci patru perechi de unghiuri congruente două câte două. Presupunem prin absurd că toate unghiurile formate în jurul punctului O au măsura mai mică decât 45^0. Rezultă că suma măsurilor celor 8 unghiuri formate în jurul punctului O este mai mică decât $8 \cdot 45^0 = 360^0$, ceea ce reprezintă o contradicţie, deoarece suma unghiurilor formate în jurul unui punct este egală cu 360^0.

b) Presupunem prin absurd că există cel puţin trei unghiuri formate de dreptele $d_1; d_2; d_3; d_4$ în jurul punctului O cu măsura mai mare decât 90^0. Având în vedere că avem patru perechi de unghiuri congruente două câte două rezultă există cel puţin patru unghiuri formate de dreptele $d_1; d_2; d_3; d_4$ în jurul punctului O cu măsura mai mare decât 90^0, deci suma măsurilor acestor patru unghiuri este mai mare decât $4 \cdot 90^0 = 360^0$, ceea ce reprezintă o contradicţie deoarece suma măsurilor tuturor celor 8 unghiuri formate de dreptele $d_1; d_2; d_3; d_4$ în jurul punctului O este egală cu 360^0.

c) *Cazul I.* $O \in d$. Dacă dreapta d coincide cu una din dreptele $d_1; d_2; d_3; d_4$, deci din cele cinci drepte avem patru drepte distincte două câte două cu care se pot forma 6 perechi de drepte concurente. Prin urmare, acestea formează $6 \times 4 = 24$ de unghiuri, iar dacă d nu coincide cu nici una din dreptele $d_1; d_2; d_3; d_4$, atunci avem cinci drepte concurente două câte două cu care se pot forma 10 perechi de drepte concurente şi acestea formează $10 \times 4 = 40$ de unghiuri.

Cazul I. $O \notin d$. Dacă dreapta d este paralelă cu una din dreptele $d_1; d_2; d_3; d_4$, atunci ea este concurentă cu fiecare din celelalte trei drepte cu care formează $3 \times 4 = 12$ unghiuri, iar cele patru drepte concurente în punctul O formează $6 \times 4 = 24$ unghiuri, deci în total $12 + 24 = 36$ unghiuri. Dacă dreapta d este concurentă cu fiecare din cele patru drepte $d_1; d_2; d_3; d_4$, atunci ea formează cu aceste drepte $4 \times 4 = 16$ unghiuri la care trebuie să adăugăm cele $6 \times 4 = 24$ unghiuri formate de cele patru drepte $d_1; d_2; d_3; d_4$ concurente în punctul O, de unde rezultă că în total avem $16 + 24 = 40$ unghiuri.

5. Aflaţi numărul natural n ştiind că media aritmetică a celor mai mici n numere impare consecutive, micşorată cu 1, este egală cu numărul natural $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2001}$

Maria Minea şi Cecilia Solomon

Soluţie: a) Avem că $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Aplicând această formulă obţinem că

$$1 + A = (1+1) + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2001} = \left(2^1 + 2^1\right) + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2001} = \left(2^2 + 2^2\right) + 2^3 +$$

$= \ldots = 2^{2001} + 2^{2001} = 2^{2002}$. Deci, $A = 2^{2002} - 1$. Cele mai mici n numere impare consecutive sunt $1; 3; 5; \ldots.\ \ldots; (2 \cdot n - 1)$, iar media aritmetică a acestor numere micşorată cu 1 este egală cu $\dfrac{1+3+5+\ldots+(2 \cdot n - 1)}{n} - 1 = = \dfrac{n^2}{n} - 1 = n - 1$. Prin urmare,

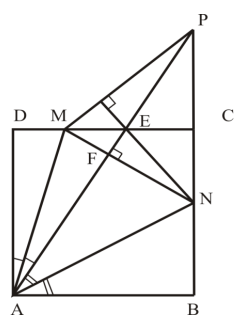
$n - 1 = A \Leftrightarrow n - 1 = 2^{2002} - 1 \Leftrightarrow n = 2^{2002}$.

CLASA a VII-a

1 *Pe latura DC a pătratului ABCD se consideră punctual E şi fie {P} = AE ∩ BC iar AN bisectoarea unghiului EAB, N ∈ (BC). Perpendiculara din P pe NE intersectează dreapta DC în M. Să se demonstreze că AM este bisectoarea unghiului DAE.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:



Deoarece MC ⊥ NP iar NE ⊥ PM rezultă că E este ortocentrul triunghiului MNP şi prin urmare PE ⊥ MN, adică AP ⊥ MN.

Notăm cu {F} = AP ∩ MN.

ΔABN ≡ Δ AFN ([AN] ≡ [AN], ∠NAB ≡ ∠ NAF)(i.u) prin urmare [AB] ≡ [AF] şi cum [AB] ≡ [AD] rezultă că [AF] ≡ [AD].

ΔADM ≡ Δ AFM ([AM] ≡ [AM], [AD] ≡ [AF]) (i.c) de unde ∠DAM ≡ ∠ FAM adică AM este bisectoarea unghiului DAF.

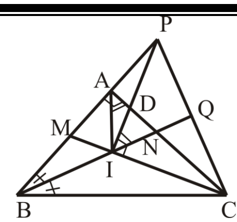
2. *Fie I intersecţia bisectoarelor BN şi CM din triunghiul dreptunghic ABC, m(∠A) = 90°. Perpendiculară în I pe IC intersectează dreapta AB în P şi pe AC în D.*

   a) Să se demonstreze că triunghiul PIC este isoscel;

   b) Să se arate că $IN^2 = AN \cdot DN$

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:



a) Din Δ ADP avem m(∠APD) = 90° - m(∠ADP) iar

Din Δ IDC avem m(∠ICD) = 90° - m(∠IDC) şi cum m(∠ADP) = m(∠IDC) rezultă că ∠APD ≡ ∠ ICD ≡ ∠ ICB.

ΔBIP ≡ Δ BIC ([BI] ≡ [BI], ∠IBP ≡ ∠ IBC, ∠IPB ≡ ∠ ICB) de unde rezultă că [BP] ≡ [BC] şi că [IP] ≡ [IC], adică triunghiul PIC este isoscel.

b). Din [BP] ≡ [BC] rezultă că triunghiul BPC este isosel şi cum BQ este bisectoarea unghiului B rezultă că BQ ⊥ PC.

Triunghiul PIC este isoscel şi cum IQ ⊥ PC rezultă că IQ este şi bisectoarea unghiului PIC, adică m(∠PIQ) = m(∠CIQ) = 45°.

Deoarece I este intersecţia bisectoarelor în triunghiul ABC, rezultă că AI este la rândul ei bisectoarea unghiului BAC, aşadar m(∠BAI) = m(∠CAI) = 45°.

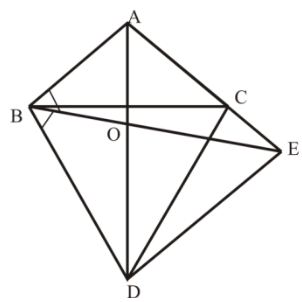
Triunghiurile AIN şi IDN sunt asemenea (∠IAN ≡ ∠ DIN(45°), ∠ANI ≡ ∠ IND (unghi comun)) de unde se obţine $\frac{IN}{DN} = \frac{AN}{IN}$, de unde $IN^2 = AN \cdot DN$

---

3. *Pe baza BC, a triunghiului isoscel ABC, în care m(∠A) = 100°, se construieşte în exteriorul, triunghiul echilateral BCD. Bisectoarea unghiului ABD intersectează dreapta AC în E. Să se demonstreze că ABDE este trapez isoscel.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:



Fie {O} = AD ∩ BE.

Din ipoteză avem că m(∠ABC) = m(∠ACB) = 40° şi cum m(∠CBD) = 60° rezultă că m(∠ABD) = 100° şi prin urmare m(∠ABE) = m(∠EBD) = 50°.

Pe de altă parte ΔABD ≡ Δ ACD([AB] ≡ [AC], [AD] ≡ [AD], [BD] ≡ [DC]) aşadar m(∠BAD) = m(∠CAD) = 50° ceea ce demonstrează că ∠OBA ≡ ∠ OAB adică triunghiul OAB este isoscel, de unde [OA] ≡ [OB] iar m(∠BOA) = 80°.

ΔBOD ≡ Δ AOE (∠OBD ≡ ∠ OAE (50°), [OB] ≡ [OA], ∠BOD ≡ ∠AOE (op. vârf)) de unde rezultă că [OD] ≡ [OE] iar [BD] ≡ [AE].

Din [OD] ≡ [OE] rezultă că triunghiul ODE este isoscel şi cum m(∠DOE) = 80°

rezultă că m(∠ODE) = m(∠OED) = 50°, aşadar m(∠OAB) = m(∠ODE) = 50° şi cum sunt alterne interne rezultă că AB || DE, adică ABDE este trapez.

Deoarece [BD] ≡ [AE] se obţine că ABDE este trapez isoscel.

---

4. a) Suma unor numere naturale impare consecutive este 209000, iar diferenţa dintre ultimul termen şi al treilea termen al sumei este 194. Câte numere sunt? Care este ultimul termen al sumei?

b) Determinaţi $n \in \mathbf{Z}$, pentru care $A=\sqrt{\dfrac{4n-5}{2n+1}}$ este număr întreg.

Cecilia Solomon şi Maria Minea

Soluţie:

a) Notăm primul termen cu a, deci termenii sumei vor fi $a,\ a+2\cdot 1,\ a+2\cdot 2, ...,\ a+2\cdot(n-1)$ unde cu n am notat numărul termenilor. Avem că $a+a+2\cdot 1+a+2\cdot 2+...+a+2\cdot(n-1)=209000$ (1) şi $a+2\cdot(n-1)-a-2\cdot 2=194$ (2). Avem că (1) $\Leftrightarrow$ $n\cdot a+2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}=209000$ şi din in relaţia (2) obţinem $n=100$ şi apoi înlocuind în relaţia (1) avem că $100\cdot a+9900=209000 \Rightarrow a=1991$. Deci, numărul termenilor este 100 iar valoarea ultimului termen este $1991+2\cdot 99=2189$.

b) $A=\sqrt{\dfrac{4\cdot n-5}{2\cdot n+1}}\in\mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{4\cdot n-5}{2\cdot n+1}\in\mathbb{Z} \Rightarrow (2\cdot n+1)\,|\,(4\cdot n-5)$. Dar $(2\cdot n+1)\,|\,(4\cdot n+2) \Rightarrow (2\cdot n+1)\,|\,7 \Rightarrow (2\cdot n+1)\in\{\pm 1;\pm 7\}$, deci $n\in\{-4;-1;0;3\}$. Verificând valorile obţinute ajungem la soluţia finală $n\in\{-1;3\}$

5. În ΔABC, fie $D \in (BC)$ astfel încât $\frac{BD}{CD} = \frac{p}{q}$ şi $E \in (AD)$ astfel încât $\frac{DE}{AE} = \frac{p}{q}$.

a) Calculaţi $\frac{AF}{CF}$ unde $\{F\} = BE \cap AC$.

b) În ce condiţii $\frac{AB}{BD} = \frac{q}{p}$?

Soluţie:

a) Aplicăm teorema lui Menelaos în ΔADC şi secanta $B-E-F : \frac{EA}{ED} \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1$ (1).

$\frac{BD}{DC} = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{p}{p+q}, \frac{EA}{ED} = \frac{q}{p}$, şi $(1) \Rightarrow \frac{FC}{FA} = \frac{p+q}{q} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{q}{p+q}$.

b) Din ipoteză avem că $\frac{BD}{CD} = \frac{p}{q}$ şi $\frac{AB}{BD} = \frac{q}{p}$, deci $\frac{CD}{BD} = \frac{AB}{BD} = \frac{q}{p}$, de unde obţinem $CD = AB$. Pentru ca ultima relaţie să fie posibilă trebuie sa avem $BC > AB$. Pe de alta

parte observam că în acest caz avem că $\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{BD} = \frac{q}{p}$ şi aplicând reciproca teoremei bisectoarei interioare obţinem că $(BE$ este bisectoarea unghiului $\angle ABC$.

Clasa a VIII-a

1. *Într-un acvariu cu dimensiunile bazei de 100 cm şi 75 cm şi înălţimea de 50 cm sunt 61 de pesti aurii. Să se arate că în orice moment există cel puţin 2 peştisori care se găsesc la o distanţă mai mică de 37 cm.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

Pentru ca sunt 61 de peştişori, vom împărţi acvariul în 60 de acvarii mai mici având dimensiunile de 25x25x5 cm. Pentru aceasta vom împărţi lungimea bazei în 4 , lăţimea bazei în 3 iar înălţimea la 5. Obţinând în acest mod 4·3·5 = 60 acvarii mai mici.

Cazul cel mai nefavorabil este în situaţia în care în fiecare acvariu mic se găseşte căte un peştişor. Cum sunt 60 de acvarii mici şi 61 de peştisori, înseamnă că într-un acvariu trebuie sa fie 2 peşti iar distanţa cea mai mare dintre ei este atunci când ei sunt în capetele unei diagonale, prin urmare $d^2 = 25^2 + 25^2 + 5^2$, adică $d^2 = 625 + 625 + 25$
$d^2 = 1300 < 1369 = 37^2$, aşadar d < 37, adică în orice moment se găsesc 2 peştişori pentru care distanţa dintre ei este mai mică de 37 cm.

---

2. *Să se rezolve în* $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ *ecuaţia:* $x \cdot (x+1) \cdot (x+9) \cdot (x+10) = y^2$.

***

Avem că

$$x \cdot (x+1) \cdot (x+9) \cdot (x+10) = y^2 \Leftrightarrow \left[x \cdot (x+10)\right] \cdot \left[(x+1) \cdot (x+9)\right] = y^2 \Leftrightarrow$$

$(x^2+10\cdot x)\cdot(x^2+10\cdot x+9)=y^2$. Notăm $t=x^2+10\cdot x$ şi ecuaţia devine

$t\cdot(t+9)=y^2 \Leftrightarrow t^2+9\cdot t-y^2=0 \Leftrightarrow$. $\Leftrightarrow \left(t^2+9\cdot t+\frac{81}{4}\right)-\frac{81}{4}-y^2=0 \Leftrightarrow$

$(2\cdot t+9)^2-4\cdot y^2=81 \Leftrightarrow (2\cdot t+9-2\cdot y)\cdot(2\cdot t+9+2\cdot y)=81$. Cum $x,y\in \mathbf{Z}$, rezultă că $(2\cdot t+9-2\cdot y)\in D_{81}$. Deci, mulţimea soluţiilor ecuaţiei, notată S, este $S=\{(0;0),(-10;0),(-9;0),(-1;0),(-5;-20),(-5;20)\}$.

3. *Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare, E,F,G picioarele înălţimilor ΔBCD şi R,P,Q mijloacele laturilor aceluiaşi triunghi ($E,R\in BC$; $F,P\in CD$; $G,Q\in BD$).*

a) Să se arate că $AE=AF=AG$ dacă şi numai dacă $AR=AQ=AP$.

b) Dacă $AB=CD$, $AD=BC$ şi $AC=BD$ să se arate că feţele tetraedrului $ABCD$ sunt triunghiuri ascuţitunghice.

Iuliana Duma

Soluţie:

a) E,F,G,P,Q,R sunt conciclice. Fie O astfel încât $AO\perp(BCD)$, $O\in(BCD)$.

„$\Rightarrow$” Din relaţiile $AE=AF=AG$ şi $AO\perp(BCD)$, rezultă că $OE=OF=OG$. Deci, $E,F,G\in \mathcal{C}\ (O,OE)$. Cum E,F,G,P,Q,R sunt conciclice, rezultă că $OP=OQ=OR$. Deoarece $AO\perp(BCD)$, din ultima relaţie obţinem că $AP=AQ=AR$.

Reciproc „$\Leftarrow$” .

b) $\Delta ABC\equiv\Delta BAD\equiv\Delta CDA\equiv\Delta DCB$. Construim $CA'\parallel BD$ astfel încât $CBDA'$ să fie paralelogram. Presupunem că $m(\angle CAD)\geq 90^\circ$. Cum $m(\angle DBC)=m(\angle CAD)$, rezultă că $CD\geq BA'$. Fie P punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului $CBDA'$. În ΔABP, avem că $AB<BP+AP$. Rezultă că $AB<BA'$, contradicţie, deoarece $AB=CD$.

4. *Se dau patru puncte necoplanare A,B,C,D, iar G_1,G_2,G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ΔABC, ΔABD şi respectiv ΔACD, iar M,N,P şi Q sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi respectiv $[AD]$.*

a) Demonstraţi că dreptele MP şi QN sunt concurente.

b) Aflaţi raportul ariilor triunghiurilor $\Delta G_1G_2G_3$ şi ΔBCD.

Cecilia Solomon

Soluţie:

a) Segmentul $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul ΔABC şi $[QP]$ este linie mijlocie în triunghiul ΔACD, de unde rezultă $MN\parallel AC$ şi $MN=\frac{AC}{2}$, respectiv $QP\parallel AC$ şi

$QP = \frac{AC}{2}$, de unde rezultă că segmentele $[MN]$ şi $[QP]$ sunt paralele şi congruente, deci $MNPQ$ este paralelogram şi, prin urmare, diagonalele paralelogramului $MNPQ$ sunt concurente, adică dreptele MP şi NQ sunt concurente.

b) Notăm cu R mijlocul segmentului $[BD]$. Avem că $G_1 \in [AN]$, $G_2 \in [AR]$, $G_3 \in [AP]$ şi $\frac{AG_1}{AN} = \; = \frac{AG_2}{AR} = \frac{AG_3}{AP} = \frac{2}{3}$. Aplicând reciproca teoremei lui Thales în triunghiurile ΔABC, ΔABD, ΔACD obţinem că $G_1G_2 \parallel NR$, $G_2G_3 \parallel RP$, $G_3G_1 \parallel PN$ şi, apoi, cu teorema fundamentală a asemănării aplicată în aceleaşi triunghiuri obţinem $\frac{G_1G_2}{NR} = \frac{G_2G_3}{RP} = \frac{G_3G_1}{PN} = \frac{2}{3}$, de unde rezultă că triunghiurile $\Delta G_1G_2G_3$ şi ΔNRP sunt asemenea cu raportul de asemănare $\frac{2}{3}$, de unde obţinem $\frac{S_{\Delta G_1G_2G_3}}{S_{\Delta NRP}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Din faptul că N, R, P sunt mijloacele laturilor triunghiului ΔBCD obţinem că $\frac{S_{\Delta NRP}}{S_{\Delta BCD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, de unde rezultă că $\frac{S_{\Delta G_1G_2G_3}}{S_{\Delta NRP}} \cdot \frac{S_{\Delta NRP}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{S_{\Delta G_1G_2G_3}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{1}{9}$.

5. *Să se arate că* $\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} \geq \frac{9}{2}$, *unde* α, β, γ *sunt măsurile unghiurilor formate de o diagonală a unui paralelipiped dreptunghic cu muchiile ce pornesc din acelaşi vârf cu aceasta.*

Emil Dumitrescu

Soluţie:

Notăm cu a, b, c lungimile muchiilor paralelipipedului şi obţinem $\sin\alpha = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{c^2+a^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ şi $\sin\gamma = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, de unde rezultă că $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$, de unde deducem $\left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$. Dacă $x, y, z > 0$ şi $x + y + z = 1$, atunci folosind inegalitatea Cauchy-Buniacovsky obţinem că $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{z}\right)^2\right) \geq$

$\geq \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \cdot (x+y+z) \geq (1+1+1)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \cdot 1 \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$.

Deci, dacă $x, y, z > 0$ şi $x + y + z = 1$, atunci $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$. Mai sus am demonstrat că avem relaţia $\left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}\right)^2=1$ şi considerând $x=\left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2$, $y=\left(\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\right)^2$ şi $z=\left(\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}\right)^2$ obţinem

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9\Leftrightarrow\frac{2}{\sin^2\alpha}+\frac{2}{\sin^2\beta}+\frac{2}{\sin^2\gamma}\geq 9\Leftrightarrow\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\geq\frac{9}{2}.$$

RUBRICA REZOLVITORILOR:

Realizată de Luminiţa Corneci

Colegiul Naţional „Ion Luca Caragiale" Ploieşti, Prof. Niţă Eugen: Angelian Nicolae Andrei 35, Baciu Rareş 35, Barbu Tudor 35, Bădoiu Radu-Gabriel 35, Bega Sebastian 35, Bîrsan Răzvan-Gabriel 35, Bone Teodora-Elena 35, Ciocodeică Anne-Marie 35, Corodea Luca-Alexandru 35, Cosereanu Brandusa-Cristina 35, Crețu Radu-Alexandru 35, Datcu Denisa-Beatrice 35, Dumitru Alexia-Helena 35, Enache Edward-Constantin 25, Guțu Rareș-Ștefan 25, Irimia Sophia-Eliana35, Jarcă Marian-David 35, Lupu Adelina 25, Marinescu David-Gabriel 35, Miriță Cătălina-Alexandra35, Năchilă Darius-Alexandru 35, Nedea Anastasia-Ioana 35, Nichita Andrei 25, Olteanu Ștefania-Miruna 35, Olteanu Teodor-Mihai 35, Popa Alexandra 35, Popa Andrei-Luca 35, Radu Horia-Mihai 35, Sporea Denisa-Ioana 35, Vasiliu Alexandra 35, Vlad Sofia-Maria 35, Voicu Andreea35,Stoica Bogdan-Mihai 35**prof. Nita Cristian** : Chivu Andreea 100, Voica Isabelle 100, Chirila Cezara 100, Jalba Bianca Maria 100, Tudor Bianca Elena 70, Mateescu Alexandru 50, Mesca Denisa 100, Sicaru Daria 80, Maracineanu Narcisa 45, Zinca Ruxandra 60, Toma Andra 50

Prof. înv. pr. Baroianu Aida: Agba Andrei 65; Albu Filip 65; Avram Daria 65; Barbu Antonia 65; Banariu Maia 65; Bega Ilinca 65; Burlacu Antonio 65; Diaconescu Karla 65; Dicu Daria 65; Dinu Liviu 65; Dinu Vlad 65; Dobleagă Alexandru 65; Dumitru Serghei 65; Gheonea Andrei 65; Gheorghe Alessia 65; Ghita Andreea 65; Iordache Luca 65; Marinescu Mara 65; Mihalache Maria65; Mocanu Daria 65; Panait Daria 65; Pandele Dinu 65; Pomojnicu Alexandra 65; Popescu Alexandra 65; Preda Luca 65; Sava Darius 65; Simionov Luca 65; Sireteanu Mihai65; Stanciu Andrei 65; Stănila Bianca 65; Stoenescu Daniela 65; Şerban Teodor 65; Moise Raluca 65; Petrescu Filip 65; Toma Mathias 65. Popescu Alexandru 65. **Prof. înv. pr. Ioana Barlaboi:** Bineata Andrei 64: Ispas Alexandra Maria 97; Manolache Ionut David 60; Rizea Ileana Andreea 97; Udroiu Teodora Maria38. **Prof. înv. pr. Carmen Obogeanu:** Andraș Teia Alexandra 25; Avram Daria Alessia 10; Diţă Ştefan Radu 25; Florea Maria Adelina 43; Gheorghe Mihai 74; Gruia Ștefan Alexandru 25; Iacobescu Andreea Maria 57; Ilie Mihnea Ştefan 43; Ionescu Şerban George 14; Iacob Denis Ionuț 42; Marin Ștefan 25; Mateescu Karina Anne Marie 25; Mihăilă Rareș 43; Pah Sara Maria 28; Panele Luca Stefan 43; Petrescu David Andrei 8; Popescu Ana Maria Florentina 8; Sandu Iustinian Constantin 25; Stanciu Vladimir Constantin 10; Toader David Ştefan 81; Zahiu Sonia Miruna 25.

Colegiul Naţional „Al. I. Cuza" Ploieşti, Profesor Isofache Cătălina: Badea Andrei Eduard 5; Borlovan Ingrid 5; CalciuAndrei Teodor 10; Chivu Alexandru Andrei 10; Chivu Daria Ioana 25; Cornescu Darius Constantin 25; Cretoiu Emilia Maria 20; Grigore Pavel Norocel 20; Ilies Theodor Alexandru 5: Ionescu Andreea Aliana 20; Iorga Vlad Andrei 15; Ivan Alexandru Marian 5; Megelea Ana Maria 25; Neagu Alexia Florentina Ioana 30; Nedelcu Denis Valentin 15; Paraschiv Cosmin Andrei 20: Petre Theodor Valentin 5: Stoica Vlad Stefan 5; Stefan Sabina

Ioana 20; Tigau Petru 5; Vasile Dana Irina 30; Vlad Andrei Flavian 5; Voicu Irina Stefania 5; Popescu Anastasia Elena 20; Stoian Marius Alexandru 20; Aga Teodora Mihaela 20; Babarus Ioana 20; Bran Larisa Simona 20; Iancu Alexandra Mădălina 20; Mares Ioana Catalina 20; Neagu Mara Stefana 20; Nichifor Ioana Bianca 20; Sandu Anastasia Georgiana 20; Sandu Andreea Cristina 20; Stan Florina Valentina 20. **Prof. Mihalache Daniela:** Tudosie Alexandra 18; Eftimie Andrada 10; Dumitru Teodora 10; Ionita Iness 10; Stefan Andreea 10; Stoicescu Teodora 10; Tudosie Alexandra 11; Anghel Andreea 8; Dima Marina 13; Epure Ioana 6; Joita Andrea 8; Krieb Ingrid 8; Maer Mara 9; Mihăilă Manuela 8; Pascale Ionela 5; Stanciu Valentina 8; Stroe Teodora 30. **Prof. Scheau Romelia:** Cimpean Eduard Ionut 10; Chirchiboi Daria Ioana 9; Simion Alex Ioan 10; Andrei Madalina Stefania 13; Beligeanu Patrich Andrei 10;Vasii Alexandru Alin 8; Dobos Emanuel Vladut 6; Dumitru Cosmina Mihaela 7; Gaitanaru Mihaela Iulia 5; Giurca Georgiana 6; Padurean Ana Maria 5; Stoica Andrei Dan 8; Bajan Ioana 9; Chivaran Adina 8; Cirstea Maria Andreea 8; Dorobantu Marina Andreea 8; Dragomirescu Ioana Catalina 8; Mihalache Florina Crina 8; Nica Mihaela Catalina 8; Pirvu Diana Elena 10; Vilcea Irina 8; Comanici Robert George 6; Dragomir Anamaria Elena 10; Minea Ioana 7; Pintoiu Ileana Alexandra 5.

Colegiul National „Jean Monnet" Ploieşti, Prof. înv. pr. Baban Marilena: Pătraşcu Iustin 34, Nedelea Octavian 34, Neagu Răzvan 34, Neagu Mara 34, Mihăilă Daria 34, Micu Teodora 34, Manta Ştefania 34, Ionescu Violeta 34, Ghinoiu Rareş 34, Florea Ştefan 34, Drăguşin Daria 34, Drăgoi David 34, Drăghici Nikolas 34, Dragomir Alexia 34, Dinulescu Ioana 34, Dima Denis 34, Dicu Dennis 34, Costăchescu Patricia 34, Constantin Vlad 34, Constantin Alessia 34, Ciuranu Eduard 34, Burlacu Andrei 34, Bordei Ema 34, Anghel Rareş 34, Aivaz Ender 34, Vlad Amalia 34, Toma Teodora 34, Şolea Andrei 34, Sărăţeanu Alexandra 34, Roman Ştefan 34, Popescu Denis 34, Mocanu Bogdan 34, Ceapchie Francesco 34, Căţoiu Adrian 34, Panait Raluca 34, Ivan Ania 34. **Prof. înv. pr. Poenaru Camelia:** Săvulescu Denisa 34, Perju Ștefan 34, Busuioc Ruxandra 34, Iordache Bianca 34, Cocârlea Ana Maria 34, Drăgoi Teodora 34, Enescu Maria 34, Lupașcu Cecilia 34, Vintilă Mara 34, Tudorache Sorina 34, Vasile Nicoleta 34, Stoica Mara 34, Țuclea Maria 34, Scarlat Mihai 34, Goran Paul 34, Nae Ștefan 34, Ene Rareș 34, Costache Ana 24, Enache Răzvan 24, Dumitru Miruna 24, Hagineagu Tudor 24, Hanciuța Alexandru 24, Oancea Irene 24, Oancea Rareș 24, Pavese Daniele 24, Pătrașcu Ana 24, Nicola Ștefan 24, Rotunjeanu Cristian 24, Apostol Alexia 24.

Şcoala Gimnazială „Sf. Vineri" Ploieşti, Prof. Crăciun Gheorghe: Victor Mindaianu 8, Stroe Ştefan 15, David Toceanu 7, Sut Nectaria 7, Popovici Alexandru 20, Sandu Madalin 5, Moise Cosmin 30, Craciun Paul 12, Chirita Ana 21; Tache Elena 10; Nitu Denisa 5,Nita Rose Mari 5, Stanescu Mihaela 4, Stanescu Cristian 4, Ciacaru Alexandru 6, Bănică Eliade Ștefan 8, Mihalache Razvan 4. Spirea Diana 5, Topaloglu Alyse 5, Mănescu Radu 10 , Vasilescu Larisa 10 , Mazilu Alexandru 10 , Marin Alexia 10 , Dumitru Denisa 10 , Andrei Bianca 18 , Anca Silviu 10 , Sima Mihai 40 , Barac Andrei 24 , Dragu Mălina 19,Echimescu David 10, Harcan Mihai 12 , Mirea Cristian 10 , Biclineru Lucian 10 , Bărtoiu Cristian Andrei 10 , Stemate George 8 , Spătaru Stefan 10 , Cismaru Iulian 15 **Prof. Dracinschi Nicoleta-Ionela:** Anghelescu Mihai 36, Ionescu Alexandru 15, Bâra Alina-Elena 12,Iancu Ana- Maria 26,Timaru Lucian-Marian 12, Coman Luca-Emanuel 23, State Costin 20, Matei Marius 15, Oancea Miruna 23, Dumitrașcu Daria 20, Dumitru Maria 25, Șerban Iona-Elena 30, Marin Mihai-David 20, Nicolae Andra 15, Nica Andrei 20, Para Alexandra 25, Gheorghe Mihaela 20, Vrabie Ștefania 25, Stanciu Mihai 26, Brânzea Ana-Maria 28, Harpa Lorena 28, Dumitru Florin 20, Davidoiu Antonia 25, Mihai Andreea 20.

Prof. Georgescu Mihaela – Roxana: Purcaroiu Ioana23, Barbu Gabriel20,Tudor Maria 18, Dobre Alexandru 20, Tene Diana20, Cristea Elena20, Jercalau Andrei28, Balcan Ioana38, Popa Stefan20, Nitescu Stefanita20, Sirbu Darius20, Tutunaru Cristiana20, Serban Sergiu20, Gheorghe Eduard20, Trifu Andreea20, Florea Alexandra20, Mantoiu Adrian20, Frusina Ruxandra18, Stanca Andrei20, Constantin Denise20, Plaiasu Robert20, Toroiman Irinel20, Proscanu Serban20, Petrescu Yarina20, Dumitu Andrada20, Gheorghe Daria20, Gheorghe Alina20, Gheorghe Mircea21, Craciun Ioana18, Ionita Theodor20, Bancila Vlad20, Serban Carina20, Cimpean **prof. înv. primar. Pană Georgeta - Raluca**: Ardeleanu Dennis 80, Baciu Sara 80, Bran Ioana 80, Cardaşol Luca 80, Constantin Armand 80, David Alexandru 80, Dumitru Alexandra 80, Ene Daria 80, Enescu Rianna 80, Herghelegiu Ioana 80, Iacob Teodora 80, Iliescu David 80, Ion Teodora 80, Ion Melania 80, Ionescu Bogdan 80, Ionescu David 80, Jercan Darian 80, Maniu Stefan 90, Matache Mihnea80, Moise Andreea 80, Moiseanu Daria 80, Nițu Emma 80, Panait Cristian 60, Pauna Aris 80, Peltea Raluca 80, Petre Alexandru 80, Predoiu Mihai 80, Sărățeanu Cristiana 80, Stoica Bianca 80, Șuț Teodosie 80, Tănăsescu Sebastian 80, Toma Anastasia 80, Vasile Rareș 80, Vintilă Andrei 80, Zahiu Alexia 80.**prof. înv. primar Mihaela Simion:** Călin Sara 21; Cismaru Alexandra 19; Dăncescu Maia 21; Ene Ionuț 21; Ilie Adina 52; Jula Mihai 24; Nicula Andrei 41; Radu David 14; Stere Teodor 21; Stoica Irina 57; Ștefan Laurențiu 21; Tănase Alessia 25; Ușurelu Rianna 50.**Prof Inv Primar G. Dumitrescu:** Adam Gabriel Andrei 28, Baciu Alexandru Mario 25, Ciocianu Bianca 29, Ene Alessia 25, Minea Daniela 26, Neacsu Alexandru 27, Stefan Sara Maria 28, Stoica Daria 29, Samoila Luca 29, Radu Briana 27, Tacea Ioan 26, Tutunaru Alexandra 25, Tarida Briana 25, Necula Andrei 23, Matache Dorin 24

Şcoala Gimnazială „Grigore Moisil” Ploieşti, prof. înv. pr. Georgescu Cristina: Marinovici Alexandru, 22; Petrosanu Bianca, 32; Aschiopoaei Teodora, 26; Duna Andreea, 30; Carstea Ana, 26; Manescu Carmen, 27; Stanimir Daria, 30; Neagu Tudor, 26; Vasile Iustin, 22; Mierla Ina, 17; Serbanescu Denis, 30; Marin Ariana, 33; Dragomir Eduard, 24; Constantin-Zoiade Gabriel, 27; Cristea Alexandru 21.

Şcoala Gimnaziala „George Emil Palade” Ploieşti, Prof. înv. pr. Pintilie Carmina: Farcas Alexandra Georgiana 10; Savu Sara Elena 10. **prof. înv. pr. Tudorache Maria:** Anghel Cosmin 30; Miron Vlad 14; Olteanu Ioana 8 . **prof. înv. pr. Contescu Daniela:** Albu Emilia 10; Mihalache Dragos; Petre Ana Maria 10.

Şcoala Gimnazială „Profesor Nicolae Simache” Ploieşti, Prof. înv. pri. Dumitrescu Luminiţa: Dăscălescu Ondina Ştefania 77; Negoiţă Elena Daniela 77; Ţiplea Daria Cristiana 73; Radu Diana Andreea 52; Enache Maria Ruxandra 51; Popescu Cristian 51; Petre David Ştefan 45; Paraschiv Maria Cristina 34; Rădulescu BiancaIoana 33; Anghelache Roberta Andreea 29; Başturea Adina Maria 29; Avramescu Vlad 20; Plăişanu Rareş Ştefan 20; Şeicăreanu Robert Lucian 19. **Prof. înv. pr. Dobrin Mirela:** Anca Davide 32; Anghel Mihai 32; Banciu Bianca 32; Barbu Carina 32; Bartoş Lorena 32; Bucur Diana 32; Călugăreanu Tabitha 32; Constantin Beatrice 32; Constantin Ianis 32; Contescu Alexandra 32; Damian Eduard 32; Dumitrescu Bogdan 32; Florea Ştefania 50; Grăniceru Daria 78; Herţanu Roxana 32; Ionescu Ştefan 32; Iosub Teodora 32; Mihalache Alesia 46 ; Mihai Alexia 32; Mitrea Radu 32; Niculescu David 32; Nistor Sasha 32; Neagu Dragoş 32; Negoiţă Erika 36; Popp Andrei32; Pospai Diana 32; Stan Ioana 32; Rădoiu Mihai 32; Săndulache Robert 32; Tarcău Mihai 38; Vintila Rares 31; Vladimirescu Mara 40; **prof. înv. pr. Georgeta Cincan:**Vrași Timeea 74; Apostol Rareș 58; Țuțulan Rebecca 48; Glijin David, Ciocan Ianna, Crăciunoiu Darius 43; Dumitrescu Diana

39; Ganea Theodor 30; Trandafir Maria 23; Duţă Alexandra 12.

Colegiul National „ Nicolae Iorga” Valenii de Munte, Prof, Dinu Elena Cristina: Cristea Mihaela 23; Chivu Ştefania 7.

Școala Gimnazială Nicolae Iorga, Ploiești. **Profesor Dinu Mirela**: Toporan Mario Andrei 19, Moise Daniel 14, Gheorghe Denisa Andreea 6, Grigore Ana-Maria Miruna 19, Pioaru David 23, Rajac Bianca Georgiana 10, Maer Sonia Maria 10, Grigore Miruna 23 Dumitrache Mihnea Ioan 14. **Profesor Gheorghe Adriana**: Fota Alexia 14, , Zorcă Anne Marie 14, Udrea Daria 26, Stănescu Dria 43, Lazăr Andreea 41.

Colegiul National “Nicolae Grigorescu” prof. Bocanu Iulia: Zavoianu Alexandra 88; Dumitrescu Albert 35; Alexandru Ana-Maria 77; Alecu Miruna 43; Pricop Tudor 42; Petre Daria 77; Goaga Bianca 120 +96 (10+86). **prof. Duşa Mihaela:** Marin Rebeca 43.

Şcoala Gimnazială „Ing. Gh. Pănculescu” Vălenii de Munte, Prof. înv. pr. Fătu Sevasta: Carpen Alexandru Ştefan 90; Toma Adrian Gabriel 17; Rădulescu Roberta 52; Osain Rareş 31; Stuparu Delia 54; Vîrjoghe Cristina 52; Dragomir Markus 52; Dumitrache Raluca 21; Jumărea Andra 44; Iancu Patricia 52; Gheorghe Luca 52.

Şcoala Gimnazială „Mihai Viteazul” Boldeşti, Prof. Bilciurescu Ion: Bălănescu Gabriela 20; **Prof. înv.pr. Voicu Roxana:** Ghindescu Rareş 79; **Prof. înv. pr. Bilciurescu Florina:** Visanoiu Maria 114; Cojocaru Doriana 113; Feraru Daria 110; Birjovanu Radu 102; Dragomir Stefan 95; Vasile Alexandru 95; Doman Iustin 94; Alexandru Andreea 90; Costache Calin 80; Matesan Sebas!an 73; Tatu Andreea 70; Pana Delia 68; Ion Miruna 68; Tarcau Calin 64; Capitanescu Denis 61; Mihai Casian 40.

Şcoala Gimnazială „Constantin Stere” Bucov, Profesor Grațiela Calcan: Andrei Veronica 5; Bîcîin Alexandra 6; Mihai Andreea 8; Minea Nicoleta 4; Malaisteanu Ana-Maria 4; Trandafirescu Ioana 5; Toader Delia 4; Ionescu Iulia 2; Tanase Alexandru 2; Dicu Raluca 4; Ene Catalin 3; Mateoiu Andreea 8; Florea Delia 8; Aron Georgiana 4; Stoica Mihaela 4; Petrache Cosmin 2; Panait Natalia 4. Andrei Veronica 3; Bîcîin Alexandra 4; Mihai Andreea 3; Trandafirescu Ioana 2; Dicu Raluca 2; Ene Catalin 2; Mateoiu Andreea 6; Florea Delia 6; Aron Georgiana 7; Tatu Alina 15; Petrache Cosmin 4; Panait Natalia 2; Petre Nidia 7; Vasiliu Roberta 4; Iuga Ramona 2; Pana Cristina 2.

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân” Constanța Gache Florian: Balan Sarah 130; Nanu Maria 100; Paris Ariana 100; Contanu Mihaiv Dragus Alexandra 100; Maxim Iulia 110; Bresug Stefan 120; Epure Elena 140; Caciandone Dimitri 100; Rusu Alexandru 110; Zisu Sarah 130; Apolozan Octavian 120; Halep Alexandra 110; Bela Marina 140; Ciopa Nicole 120; Gheldi Iren 130; Lefter Sinziana 120; Avrigeanu Andrei 140; Osman Arun 140; Gache Adina 120; Micu Alexia 140; Bonciu David 100; Moise Tiberiu 100; Petre Mihnea 110; Cristea Ruxandra 100; Cristea Mihnea 100; Coada Alexandra 140; Bratulescu Bianca 100; Andries Miruna 100; Soricut Irina 100; Panait Ilinca 120; Anghel Dragos 100; Scriosteanu Cosmin 100; Micu Raisa 110.

Şcoala Nr. 1 Suceava, prof. Toma Lăcrămioara: Bertea Cezara Elena 39; Buta Ana Letiția 39; Domunco Daria Teodora 39; Fujii Luca Ion 44; Gheţău Ioana 44; Ignătescu Răzvan 39; Irimescu-Kruk Timea 50; Ivan Rare Răzvan 44; Ma Nin Andreiş 39; Melinte – Popescu Tudor Ştefan 44; Pîslaru Andrada 25; Popovici Mihnea 44; Puha Sara 37; Sănducu Cosmin 25; Sorocaniuc Ciprian Luca 44; Stroia Viana 44; Şuhani-Hreceniuc Matei Andrei 25; Tomniuc Matei 39; Vizitiu Tudor tefan 39. **Prof. Andronache Maricica:** Sofroni MaiaAnastasia 10, Sîrghi Tudor Ştefan 10, Toma Dragoş Ionuţ 10.

Şcoala Gimn. “Discovery”, jud. Ilfov. Prof.Grama Monica: Toader Amalia Cristiana 10.