Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 4-6i$. Arătați că numărul $z_1z_2 + 2z_1 + z_2$ este real.
5p	**2.** Calculați $(f \circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5\left(x^2-4\right)=\log_5(5x-8)$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 7.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=3x-2017$ și punctul $A(1,0)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
5p	**6.** Arătați că $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det(A(2))$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numerele naturale n și p, știind că $A(n)B(p)=B(3)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+8X+3$, unde a este număr real.
5p	**a)** Determinați numărul real a, știind că $f(1)=0$.
5p	**b)** Pentru $a=6$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+5X+3.
5p	**c)** Demonstrați că, dacă $a\in(-4,4)$, atunci polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2018}+2018x+2$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,2020)$ aparține tangentei la graficul funcției f care trece prin punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}dx$.
5p	**a)** Calculați $\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)dx$.
5p	**b)** Demonstrați că $I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.
5p	**c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=\frac{1}{5}$.

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1 z_2 + 2z_1 + z_2 = (2+3i)(4-6i) + 2(2+3i) + 4 - 6i =$	**2p**
	$= 8 - 12i + 12i - 18i^2 + 4 + 6i + 4 - 6i = 34$, care este număr real	**3p**
2.	$g(0) = 1$	**2p**
	$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 1$	**3p**
3.	$x^2 - 4 = 5x - 8 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$	**3p**
	$x = 1$, care nu verifică ecuația; $x = 4$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 13 numere naturale de două cifre, multipli de 7, deci sunt 13 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{13}{90}$	**2p**
5.	Dreapta paralelă cu dreapta d are panta egală cu 3	**2p**
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y = 3x - 3$	**3p**
6.	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\sin x + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x - x\right) =$	**3p**
	$= \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 4$	**3p**
b)	$A(x) + B(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 2x & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(x) + B(x)) = \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 2x & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x^2 - 4x^2 =$	**3p**
	$= -2x^2 = \det(B(x))$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(n)B(p) = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & p & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & np \\ 0 & np & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**2p**
	$A(n)B(p) = B(3) \Leftrightarrow np = 3$ și, cum n și p sunt numere naturale, obținem $n = 1$, $p = 3$ sau $n = 3$, $p = 1$	**3p**
2.a)	$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 3 = 0$	**2p**
	$a = -12$	**3p**

b)	$a=6 \Rightarrow f=X^3+6X^2+8X+3$ și câtul este $X+1$ Restul este 0	**3p** **2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-16$ Pentru $a\in(-4,4)$, obținem $a^2-16<0$, deci $x_1^2+x_2^2+x_3^2<0$, adică polinomul f nu are toate rădăcinile reale	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^{2018}\right)'+(2018x)'+2'=$ $=2018x^{2017}+2018=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=2018x+2$ $2020=2018a+2 \Leftrightarrow a=1$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $f(-1)=-2015$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii reale distincte	**2p** **3p**
2.a)	$\int\limits_0^1\left(x^2+2x+2\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right)\right\|_0^1=$ $=\frac{1}{3}+1+2=\frac{10}{3}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\int\limits_0^1\frac{x^{n+1}+2x^n+2x^{n-1}}{x^2+2x+2}dx=$ $=\int\limits_0^1\frac{x^{n-1}\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2}dx=\int\limits_0^1 x^{n-1}dx=\left.\frac{x^n}{n}\right\|_0^1=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int\limits_0^1\frac{x^n(x-1)}{x^2+2x+2}dx\leq 0$, deci $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n $5I_{n+1}\leq I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}\leq 5I_{n-1} \Rightarrow 5I_{n+1}\leq\frac{1}{n}\leq 5I_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$ Pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, $\frac{n}{5(n+1)}\leq nI_n\leq\frac{n}{5(n-1)}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=\frac{1}{5}$	**1p** **2p** **2p**