

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 1 - i$. Arătați că $z^2 + 2i = 0$.
- 5p** 2. Calculați $(g \circ f)(0)$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2017$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 2017$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-3x} = 3^{x-4}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, acesta să fie pătrat perfect.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$. Determinați ecuația dreptei d , care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y = x - 10$.
- 5p** 6. Determinați aria triunghiului ABC , știind că $AB = 6$, $AC = 4$ și $A = \frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
- 5p** a) Calculați $\det(A(0))$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(1+m) + A(1-m) = 2A(1)$, pentru orice număr real m .
- 5p** c) Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -3xy + 9x + 9y - 24$.
- 5p** a) Arătați că $x * y = -3(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** b) Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Determinați numărul real x , pentru care $(x * x) * x = 12$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+3}$.
- 5p** a) Calculați $\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x) dx$.
- 5p** b) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.
- 5p** c) Demonstrați că $\int_{-1}^0 f'(x)f(x) dx = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z^2 + 2i = (1-i)^2 + 2i = 1 - 2i + i^2 + 2i = 1 - 1 = 0$	2p 3p
2.	$f(0) = 2017$ $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(2017) = 0$	2p 3p
3.	$x^2 - 3x = x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$ $x = 2$	3p 2p
4.	Mulțimea M are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile În mulțimea M sunt 10 pătrate perfecte, deci sunt 10 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$	1p 2p 2p
5.	Panta unei perpendiculare pe dreapta d este egală cu -1 Ecuția dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d este $y = -x + 1$	2p 3p
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{6 \cdot 4 \cdot \sin \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 6$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - (-2) = 4$	2p 3p
b)	$A(1+m) + A(1-m) = \begin{pmatrix} 1+m-1 & -1 \\ 2 & 1+m-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-m-1 & -1 \\ 2 & 1-m-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2A(1)$, pentru orice număr real m	3p 2p
c)	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 4$ Pentru orice număr real m , $m^2 - 3m + 4 \neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	2p 3p
2.a)	$x * y = -3xy + 9x + 9y - 27 + 3 = -3x(y-3) + 9(y-3) + 3 = -3(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
b)	$(x * y) * z = (-3(x-3)(y-3) + 3) * z = 9(x-3)(y-3)(z-3) + 3$ $x * (y * z) = x * (-3(y-3)(z-3) + 3) = 9(x-3)(y-3)(z-3) + 3 = (x * y) * z$, pentru orice numere reale x , y și z , deci legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă	2p 3p

c)	$(x * x) * x = 9(x - 3)^3 + 3$	2p
	$9(x - 3)^3 + 3 = 12 \Leftrightarrow (x - 3)^3 = 1 \Leftrightarrow x = 4$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} = \frac{3x^3 - 3}{x} =$	3p
	$= \frac{3(x^3 - 1)}{x} = \frac{3(x-1)(x^2 + x + 1)}{x}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^3 - 3 \ln x) = +\infty$	2p
	Dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$	1p
	$x \in (0, 1] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$	1p
	$x \in [1, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	1p
	Cum $f(1) = 1$, obținem $f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	2p
2.a)	$\int_1^2 (x^2 + 3x + 3) f(x) dx = \int_1^2 (2x + 3) dx = (x^2 + 3x) \Big _1^2 =$	3p
	$= 10 - 4 = 6$	2p
b)	$\mathcal{A} = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 3} dx = \ln(x^2 + 3x + 3) \Big _0^3 =$	3p
	$= \ln 21 - \ln 3 = \ln 7$	2p
c)	$\int_{-1}^0 f'(x) f(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) \Big _{-1}^0 =$	3p
	$= \frac{1}{2} (f^2(0) - f^2(-1)) = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0$	2p