Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_3 = 5$ și $b_4 = 10$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+12}=x+2$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ şi $B(1,0)$. Determinați ecuația dreptei AB.

5p **6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB=6$ şi $C=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & -x\\ 2x & 1-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\neq 1$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1\circ 2\circ 3\circ 4=3$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $\ln x\leq x-1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+1)f(x)\,dx=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=1-\frac{\pi}{4}$.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale n, ştiind că $\int_n^{n+1} 2x f(x)\,dx=\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=\frac{b_4}{b_3}=\frac{10}{5}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
2.	$x\le 5\Rightarrow x-3\le 2$	**2p**
	$f(x)\le 2$, deci valoarea maximă a funcției este 2	**3p**
3.	$x^2+12=(x+2)^2\Rightarrow 4x-8=0$	**3p**
	$x=2$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$C_7^2=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=$	**3p**
	$=21$	**2p**
5.	$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x-1}{3-1}$	**3p**
	$y=2x-2$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\frac{6}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=$	**3p**
	$=2\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+x&-x\\2x&1-2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+y&-y\\2y&1-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x+y-xy&-y-x+xy\\2x+2y-2xy&1-2y-2x+2xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+(x+y-xy)&-(x+y-xy)\\2(x+y-xy)&1-2(x+y-xy)\end{pmatrix}=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(x)A(x)=I_2$ și, cum $I_2=A(0)$, obținem $A\left(x+x-x^2\right)=A(0)$	**3p**
	$2x-x^2=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=2$	**2p**
2.a)	$x\circ y=2xy-6x-6y+18+3=$	**2p**
	$=2x(y-3)-6(y-3)+3=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$1\circ 2\circ 3\circ 4=((1\circ 2)\circ 3)\circ 4=$	**3p**
	$=3\circ 4=3$	**2p**

c)	$x\circ x=2(x-3)^2+3$, $x\circ x\circ x=4(x-3)^3+3$	**2p**
	$4(x-3)^3+3=x \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ sau $x=3$ sau $x=\frac{7}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-(\ln x)'=$	**2p**
	$=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f''(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$	**1p**
	$x\in(0,1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**1p**
	$x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1)=1$, obținem $f(x)\ge 1$, deci $\ln x\le x-1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (x^2+1)f(x)dx=\int_0^1 (x^2+1)\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^1 1dx=x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$\int_0^1 x^2f(x)dx=\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=$	**2p**
	$=x\Big\vert_0^1-\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=1-\operatorname{arctg}1=1-\frac{\pi}{4}$	**3p**
c)	$\int_n^{n+1}2xf(x)dx=\int_n^{n+1}\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)\Big\vert_n^{n+1}=\ln\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}$	**3p**
	$\ln\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}=\ln 2\Leftrightarrow n^2-2n=0\Leftrightarrow n=0$ sau $n=2$	**2p**