

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 2016$ și rația $r = 2$.
- 5p 2. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(1,2)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + m$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4x-6} = 4^{3x-4}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$, acesta să conțină cifra 4.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$ și $B(4, 5)$. Determinați ecuația dreptei AB .
- 5p 6. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{4}{5}$, arătați că $\sin 2x = \frac{24}{25}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y - z = -1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = -2$.
- 5p b) Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a , $a \neq -1$ și $a \neq 1$.
- 5p c) Determinați numerele întregi a , pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) , iar x_0 , y_0 și z_0 sunt numere întregi.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.
- 5p a) Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$. Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele reale a , pentru care $\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{\text{de } 2016 \text{ ori } a} = 3^{2015} - 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1, +\infty)$.
- 5p c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f'(2) + f'(3) + f'(4) + \dots + f'(n)) = -\frac{3}{2}$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 \sqrt{x} f(x) dx = \frac{5}{2}$.

5p b) Arătați că $\int_1^{e^2} (f(x) - \sqrt{x}) \ln x \, dx = 4$.

5p c) Determinați numărul real a , $a > 1$, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [1, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este egal cu $\pi \left(\ln a + \frac{7}{2} \right)$.

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_3 = 2016 + 2 \cdot 2 =$ $= 2020$	3p 2p
2.	$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + m = 2$ $m = 1$	3p 2p
3.	$2^{4x-6} = (2^2)^{3x-4} \Leftrightarrow 4x - 6 = 6x - 8$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 40 de elemente, deci sunt 40 de cazuri posibile Numerele din mulțimea A care conțin cifra 4 sunt 4, 14, 24, 34 și 40, deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$	1p 2p 2p
5.	$y - 2 = \frac{5 - 2}{4 - 1}(x - 1)$ $y = x + 1$	3p 2p
6.	Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{3}{5}$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$ $= -2 + 0 + 0 - 1 - (-1) - 0 = -2$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+1)$ Pentru orice număr real a , $a \neq -1$ și $a \neq 1$, obținem $\det(A(a)) \neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	3p 2p
c)	Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq 1$; pentru fiecare număr a , $a \neq -1$ și $a \neq 1$, soluția sistemului este de forma $\left(-\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}, 0\right)$ Cum a este număr întreg, $\frac{1}{a-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a-1$ este divizor al lui 1, deci $a = 0$ sau $a = 2$	3p 2p

2.a)	$x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 3 - 1 =$ $= 3x(y+1) + 3(y+1) - 1 = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$f(x \circ y) = 3(x \circ y) + 3 = 3(3(x+1)(y+1) - 1) + 3 = 9(x+1)(y+1) =$ $= (3x+3)(3y+3) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$f\left(\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{\text{de 2016 ori}}\right) = f(3^{2015} - 1) \Leftrightarrow (f(a))^{2016} = 3 \cdot (3^{2015} - 1) + 3 \Leftrightarrow (f(a))^{2016} = 3^{2016} \Leftrightarrow f(a) = -3$ sau $f(a) = 3$ $a = -2$ sau $a = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	Cum $x \in (1, +\infty)$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1) \Rightarrow f'(x) = (\ln(x+1) - \ln(x-1))' =$ $= (\ln(x+1))' - (\ln(x-1))' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$	2p 3p
b)	$f''(x) = \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$ Pentru orice $x \in (1, +\infty)$, $f''(x) > 0$, deci funcția f este convexă pe $(1, +\infty)$	2p 3p
c)	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f'(2) + f'(3) + \dots + f'(n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right) \right) =$ $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{3}{2}$	3p 2p
2.a)	$\int_1^2 \sqrt{x} f(x) dx = \int_1^2 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big _1^2 =$ $= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$	3p 2p
b)	$\int_1^{e^2} (f(x) - \sqrt{x}) \ln x dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln x \Big _1^{e^2} - 2 \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$ $= (2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x}) \Big _1^{e^2} = 4e - 4e + 4 = 4$	3p 2p
c)	$V = \pi \int_1^a g^2(x) dx = \pi \int_1^a \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + 2x + \ln x \right) \Big _1^a = \pi \left(\frac{a^2}{2} + 2a + \ln a - \frac{5}{2} \right)$ $\pi \left(\frac{a^2}{2} + 2a + \ln a - \frac{5}{2} \right) = \pi \left(\ln a + \frac{7}{2} \right) \Leftrightarrow a^2 + 4a - 12 = 0$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 2$	3p 2p