Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, ştiind că $b_1 = 4$ şi raţia $q = 2$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(2x+1) = \log_3 5$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

5p **5.** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $M(1,0)$ aparţine dreptei de ecuaţie $y = mx - 2$.

5p **6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB = \sqrt{2}$ şi $C = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(2)) = -1$.

5p **b)** Demonstraţi că $A(a) + A(-a) = 2A(0)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinaţi numărul real x, ştiind că $A(x)A(x) = 2A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + mX + 4$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(-1) + f(1) = 0$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Pentru $m = -1$, arătaţi că polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m, ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 0$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(e) < \frac{7}{2}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2 x^2 f(x)\,dx = e(e-1)$.

5p **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p **c)** Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = 2$ are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_2 = b_1 \cdot q = 4 \cdot 2 =$	**3p**
	$= 8$	**2p**
2.	$x_V = 1$	**2p**
	$y_V = -1$	**3p**
3.	$2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 4$	**3p**
	$x = 2$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$C_5^2 = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} =$	**3p**
	$= 10$	**2p**
5.	$0 = m \cdot 1 - 2$	**3p**
	$m = 2$	**2p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{2}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}} =$	**3p**
	$= 1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0 - 1 = -1$	**3p**
b)	$A(a) + A(-a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+a & 1 \\ 1 & 2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$A(x)A(x) = \begin{pmatrix} x^2 - 4x + 5 & 4 - 2x \\ 4 - 2x & x^2 - 4x + 5 \end{pmatrix}$, $2A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2 \\ 4 - 2x = 2 \end{cases}$, de unde obținem $x = 1$	**2p**
2.a)	$f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) + 4 = -m - 1$	**2p**
	$f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + 4 = m + 1 \Rightarrow f(-1) + f(1) = -m - 1 + m + 1 = 0$, pentru orice număr real m	**3p**
b)	$m = -1 \Rightarrow f(-1) = f(1) = 0$	**3p**
	$X - 1$ divide f și $X + 1$ divide f, deci polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=16-2m$	**3p**
	Cum $x_1x_2x_3=-4$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2-\dfrac{4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}{x_1x_2x_3}=16-2m-\dfrac{4m}{-4}=16-m$, obținem $m=16$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=3$, $f'(2)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=3$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(2,+\infty)$	**2p**
	Cum $2<e<3$ şi $f(3)=\dfrac{7}{2}$, obținem $f(e)<\dfrac{7}{2}$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 x^2 f(x)dx=\int_1^2 e^x dx=e^x\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$F''(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}\ge 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci funcția F este convexă pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^2 \lvert f(x)\rvert dx=\int_1^2 \dfrac{e^x}{x^2}dx$	**2p**
	Cum $x\ge 1\Rightarrow x^2\ge 1\Rightarrow \dfrac{1}{x^2}\le 1$, obţinem $\dfrac{e^x}{x^2}\le e^x$, deci $\mathcal{A}\le\int_1^2 e^x dx$, adică $\mathcal{A}\le e(e-1)$	**3p**