

Test la MATEMATICĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Considerăm numărul complex  $z = m + i$ ,  $m$  fiind un parametru real ( $i^2 = -1$ ). Pentru ce valori ale lui  $m$  avem  $\left| \bar{z} - \frac{2}{z} \right| \geq 1$ ?
- 5p** 2. Arătați că, dacă  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ , atunci numerele  $\frac{a+b}{a+b-c}$ ,  $\frac{b+c}{b+c-a}$  și  $\frac{c+a}{c+a-b}$  nu sunt simultan din intervalul  $(1, 2)$ .
- 5p** 3. Rezolvați sistemul  $\begin{cases} xy = 1 \\ x^{2x-y} = y^{2(x-y)} \end{cases}$  în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- 5p** 4. Notăm cu  $\mathcal{P}(X)$  mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii  $X$ . O funcție  $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  este *bună* dacă  $f(A) \subseteq A$ ,  $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ . Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare o funcție  $f : \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ , aceasta să fie *bună*?
- 5p** 5. Calculați distanța dintre dreptele de ecuații  $2x - y - 5 = 0$  și  $2y - 4x + 7 = 0$ .
- 5p** 6. Determinați soluțiile din intervalul  $[0, 2\pi]$  ale ecuației  $4\cos^3 x - 3\cos x - \sin 3x = 0$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Fie matricea  $A(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-xy} & x \\ y & -\sqrt{1-xy} \end{pmatrix}$ , unde parametri reali  $x$  și  $y$  sunt așa încât  $xy \leq 1$ .
- 5p** a) Să se arate că mulțimea  $\{ B_p \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid B_p = A(1+p, 1-p) - A(1, 1), p \in \mathbb{R}_+ \}$ , împreună cu operația de adunare a matricelor, formează monoid.
- 5p** b) Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ , să se calculeze determinantul matricei  $\sum_{k=0}^n A^k(1, 0)$ , unde  $A^0(1, 0) = I_2$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că dacă  $B, C \in M_{2,1}(\mathbb{R})$  sunt astfel încât  $A(x, y)B = B$  și  $A(x, y)C = -C$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , cu  $xy \leq 1$ , atunci  $B^T C = 0$ .
- 5p** 2. Fie  $x_1, x_2$  și  $x_3$  rădăcinile polinomului  $P = X^3 + 3X^2 + pX + q$  din  $\mathbb{R}[X]$ .
- 5p** a) Să se calculeze, în funcție de  $p$  și  $q$ , determinantul
- $$\begin{vmatrix} x_1 & qx_2 & x_3 \\ x_2 & qx_3 & x_1 \\ px_3 & pqx_1 & px_2 \end{vmatrix}.$$
- 5p** b) Determinați  $p$  și  $q$  astfel încât  $P$  să aibă o rădăcină de multiplicitate trei.
- 5p** c) Care este relația dintre  $p$  și  $q$  dacă toate cele trei rădăcini ale lui  $P$  au aceeași parte reală?

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu proprietatea:  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Demonstrați că  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Dacă  $f(0) = 1$ , aflați  $f(1)$ .
- 5p** c) Arătați că valoarea în  $x = 0$  a derivatei  $\left( \frac{f(x)}{x+1} \right)^{(n)}$  este egală cu  $(-1)^n n! f(0)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** 2. Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , notăm  $J_n = \int_0^1 \ln^n(x+1) dx$ .
- 5p** a) Calculați  $J_1$  și  $J_2$ .
- 5p** b) Arătați că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ,  $J_n + nJ_{n-1} = 2\ln^n 2$ .
- 5p** c) Demonstrați că șirul  $\left( \frac{J_{2n}}{(2n)!} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent și aflați-i limita.