

Barem de corectare la MATEMATICĂ

- Se acordă **10 puncte** din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă un punctaj corespunzător.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left \bar{z} - \frac{2}{z} \right \geq 1, z \neq 0 \iff \left z ^2 - 2 \right \geq z \quad (1)$ $r \stackrel{\text{not.}}{=} z = \sqrt{m^2 + 1} > 0 \xRightarrow{(1)} r^2 - 2 \geq r \quad (2)$ $r \in (0, \sqrt{2}] \xRightarrow{(2)} r^2 + r - 2 \leq 0 \xRightarrow{(r>0)} r \leq 1 \implies m = 0 \quad (3)$ $r \in (\sqrt{2}, \infty) \xRightarrow{(2)} r^2 - r - 2 \geq 0 \xRightarrow{(r>0)} r \geq 2 \implies m^2 \geq 3 \quad (4)$ $(3)+(4) \implies \text{concluzia: } m \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{3}, \infty)$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
2.	$\frac{a+b}{a+b-c} \in (1, 2) \iff \left(\frac{a+b}{a+b-c} - 1 \right) \left(\frac{a+b}{a+b-c} - 2 \right) < 0 \xLeftrightarrow{c \in \mathbb{R}_+^*} 2c - a - b < 0 \quad (1)$ $\frac{b+c}{b+c-a} \in (1, 2) \xLeftrightarrow{a \in \mathbb{R}_+^*} 2a - b - c < 0 \quad (2)$ $\frac{c+a}{c+a-b} \in (1, 2) \xLeftrightarrow{b \in \mathbb{R}_+^*} 2b - c - a < 0 \quad (3)$ $(1)+(2)+(3) \implies 0 = (2c - a - b) + (2a - b - c) + (2b - c - a) < 0 \quad (F)$ <p>Metoda reducerii la absurd; Concluzia.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
3.	$x > 0, y > 0 \quad (1)$ $y = \frac{1}{x} \implies x^{2x - \frac{1}{x}} = x^{\frac{2}{x} - 2x} \implies x^{4x - \frac{3}{x}} = 1 \quad (2)$ $(2) \implies x = 1 \xRightarrow{y=\frac{1}{x}} y = 1 \quad (3)$ $\implies 4x - \frac{3}{x} = 0 \implies x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \xRightarrow{x>0} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \xRightarrow{y=\frac{1}{x}} y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (4)$ $(3)+(4) \implies \text{concluzia: } (x, y) \in \left\{ (1, 1), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \right\}.$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
4.	$M_{pos} = \{f : \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})\}; M_{pos} = 16^{16} = 2^{64}$ $M_{fav} = \{f : \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \mid f(A) \subseteq A, \forall A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})\}; M_{fav} = 2^{32}$ <p>Concluzia: probabilitatea cerută este egală cu $\frac{ M_{fav} }{ M_{pos} }$, adică $\frac{1}{2^{32}}$.</p>	<p>1p</p> <p>3p</p> <p>1p</p>
5.	<p>Egalitatea pantelor celor două drepte \implies dreptele sunt paralele (*)</p> <p>(*) \implies există distanța cerută, ca distanță de la orice punct al uneia la cealaltă</p> <p>Formula corectă a distanței de la un punct la o dreaptă (în plan)</p> <p>Aplicarea respectivei formule și concluzia $d = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
6.	$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \forall x \in \mathbb{R} \implies \text{ecuația dată: } (\cos x + \sin x)(1 - 2 \sin 2x) = 0 \quad (\#)$ $(\#) \implies \cos x + \sin x = 0 \implies x_1 = \frac{3\pi}{4}, x_2 = \frac{7\pi}{4} \in [0, 2\pi]$ $(\#) \implies \sin 2x = \frac{1}{2} \implies x_3 = \frac{\pi}{12}, x_4 = \frac{5\pi}{12}, x_5 = \frac{13\pi}{12}, x_6 = \frac{17\pi}{12} \in [0, 2\pi] \text{ și concluzie}$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>

1.a)	$B_p = p \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \forall p \in \mathbb{R}_+ \quad (1)$	1p
	$(1) \implies B_p + B_q = B_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{R}_+ \quad (2)$	1p
	$(1) \implies B_p + (B_q + B_r) = (B_p + B_q) + B_r, \forall p, q, r \in \mathbb{R}_+ \quad (3)$	1p
	$(1) \xrightarrow{p=0} \exists B_0 = O_2: B_p + B_0 = B_0 + B_p = B_p, \forall p \in \mathbb{R}_+ \quad (4)$	1p
	$(2)+(3)+(4) \implies$ concluzia: $(\{B_p \mid p \in \mathbb{R}_+\}, +) = \text{monoid.}$	1p
b)	$A(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies A^k(1,0) = \begin{cases} A(1,0), & k = \text{impar} \\ I_2, & k = \text{par} \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N}$	2p
	$\sum_{k=0}^n A^k(1,0) = \begin{pmatrix} n+1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in 2\mathbb{N}^*; \sum_{k=0}^n A^k(1,0) = \begin{pmatrix} n+1 & \frac{n+1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall n \in 2\mathbb{N}+1$	2p
	Concluzia: $\det \left(\sum_{k=0}^n A^k(1,0) \right) = \frac{n+1}{2} (1 + (-1)^n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$	1p
c)	$B^T C = (A(x,y)B)^T C = B^T A^T(x,y)C = B^T A(y,x)C, \forall x,y \in \mathbb{R}, xy \leq 1 \quad (1)$	3p
	$B^T A(y,x)C = -B^T C, \forall x,y \in \mathbb{R}, xy \leq 1 \quad (2)$	1p
	$(1) + (2) \implies$ concluzia: $B^T C = 0.$	1p
2.a)	Relațiile corecte între coeficienți și rădăcini	1p
	Folosirea unor proprietăți utile ale determinantului	1p
	Calculul determinantului, fără erori	2p
	Concluzia (valoarea determinantului): $9pq(3-p)$	1p
b)	$x_0 = \text{rădăcină triplă} \iff P(x_0) = P'(x_0) = P''(x_0) = 0, P'''(x_0) \neq 0$	1p
	$P'''(x) = 6 \neq 0, \forall x; P''(x_0) = 6x_0 + 6 = 0 \implies x_0 = -1$	1p
	$0 = P'(x_0) = P'(-1) = p - 3 \implies p = 3$	1p
	$0 = P(x_0) = P(-1) = q - p + 2 = q - 1 \implies q = 1$	1p
	Concluzia: $p = 3$ și $q = 1 \implies P$ are o rădăcină triplă $x_0 = -1.$	1p
c)	$\text{grad}(P) = 3 = \text{număr impar} \implies \exists a \in \mathbb{R}, P(a) = 0$	1p
	$P \in \mathbb{R}[X] \implies x_1 = a, x_2 = a + ib, x_3 = a - ib$	1p
	$3a = x_1 + x_2 + x_3 = -3 \implies a = -1$	1p
	$0 = P(a) = P(-1) = q - p + 2$ și concluzia $p = q + 2.$	2p

1.a)	Conceptul de derivabilitate a lui f pe \mathbb{R}	1p
	$ f(x) - f(y) \leq x - y ^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \implies 0 \leq \frac{ f(y) - f(x) }{ y - x } \leq y - x , \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq x \implies$ $\exists \lim_{y \rightarrow x} \frac{ f(y) - f(x) }{ y - x } = 0 \implies \exists f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$	3p
	Concluzia: f este derivabilă pe \mathbb{R} .	1p
b)	$f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies f$ este funcție constantă pe \mathbb{R} (1)	2p
	(1) $\implies f(1) = f(0)$ (2)	2p
	(2) \implies concluzia: $f(1) = 1$.	1p
c)	$f(x) = c \text{ (} \in \mathbb{R} \text{)}, \forall x \in \mathbb{R} \implies \left(\frac{f(x)}{x+1}\right)^{(n)} = c \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ (1)	1p
	$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ (aplicarea ind. mat.) (2)	2p
	$\xrightarrow[x=0]{c=f(0)}$ concluzia: $\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)^{(n)} \Big _{x=0} = (-1)^n n! f(0), \forall n \in \mathbb{N}^*$.	1p
2.a)	$J_1 = 2 \ln 2 - 1$	2p
	$J_2 = 2(\ln 2 - 1)^2$.	3p
b)	$J_n = (\ln 2)^n - n \int_0^1 \frac{x}{x+1} \ln^n(x+1) dx$ (1)	2p
	(1) $\implies J_n = (\ln 2)^n - n J_{n-1} + \ln^n(x+1) \Big _0^1 = 2(\ln 2)^n - n J_{n-1}$ și concluzia	3p
c)	$\frac{J_{2n}}{(2n)!} - \frac{J_{2n-2}}{(2n-2)!} = \frac{2(\ln 2)^{2n-1}}{(2n)!} (\ln 2 - 2n) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \implies \left(\frac{J_{2n}}{(2n)!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = \text{descrescător}$ (1)	2p
	$\frac{J_{2n}}{(2n)!} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \implies \left(\frac{J_{2n}}{(2n)!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = \text{șir mărginit inferior (de 0)}$ (2)	1p
	(1) + (2) $\implies \left(\frac{J_{2n}}{(2n)!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = \text{șir convergent}$	1p
	$\frac{J_{2n}}{(2n)!} < \frac{4}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \xrightarrow{(2)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{2n}}{(2n)!} = 0$.	1p