Universitatea din Bucureşti **22.07.2016**
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2016
Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(a) Să se calculeze $2A^2 - 3A$.
(b) Să se arate că $(2A^2 - 3A)A = A(2A^2 - 3A)$.
(c) Să se determine toate matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $AX = XA$.
(d) Să se arate că mulţimea $C = \{X \in M_2(\mathbb{R}) |\ AX = XA\}$ este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor şi că C este inel împreună cu aceste operaţii.
(e) Să se arate că $A^n \neq I_2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

II. Analiză. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$.

(a) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f şi punctele de extrem local ale acestei funcţii.
(b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ ecuaţia $f^{(n)}(x) = 0$ are două soluţii reale, unde $f^{(n)}$ este derivata de ordinul n a funcţiei f.
(c) Calculaţi $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.
(d) Demonstraţi că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{9^n} \int_1^2 (f(x))^n\,dx = 0$.

III. Geometrie. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de latură 2.

(a) Calculaţi aria triunghiului ACE.
(b) Calculaţi $|\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\ |$.
(c) Pe segmentele (AC) şi (CE) se consideră punctele M respectiv N astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$. Determinaţi numărul k astfel încât punctele B, N şi M să fie coliniare.

IV. Informatică.

Se dă un şir de n numere întregi, cu n număr natural nenul, mai mic decât 32000. Se elimină primul element din şir şi toate elementele şirului aflate pe poziţii care reprezintă numere prime, în ordinea crescătoare a poziţiilor. Operaţia se repetă cu elementele rămase în şir, repoziţionate după eliminarea celorlalte, până când este eliminat şi ultimul element rămas. Să se scrie un program care afişează elementele şirului iniţial, în ordinea în care au fost eliminate conform algoritmului descris mai sus.

Exemplul 1. Pentru $n = 10$ şi şirul $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ programul va afişa 1 2 3 5 7 4 6 8 10 9.

Exemplul 2. Pentru $n = 20$ şi şirul 4, 23, 16, -7, 89, 115, 23, 11, 15, 2, -8, -9, 21, 0, 75, 23, 32, -1, 4, 5 programul va afişa 4 23 16 89 23 -8 21 32 4 -7 115 11 2 0 5 15 -9 75 -1 23.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti **22.07.2016**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2016
Domeniul de licenţă - *Matematică*

Barem

I. Algebră. Oficiu .... 1 p

(a) Calculul lui $2A^2 - 3A$: $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 15 & 8 \end{pmatrix}$ .... 2 p

(b) Verificarea egalităţii .... 1 p

(c) Determinarea matricelor X: $\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$, cu $x, y \in \mathbb{R}$ .... 2 p

(d) C parte stabilă .... 1 p

$(C, +, \cdot)$ - inel .... 2 p

(e) $A^n \neq I_2$ .... 1 p

II. Analiză. Oficiu .... 1 p

(a) $y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$ .... 1 p

$x = 1$ şi $x = 2$ puncte de extrem local .... 2 p

(b) Calculul derivatei de ordinul n: $f^{(n)}(x) = e^x(x^2 + (2n-5)x + (n^2 - 6n + 7))$ .... 1 p

Ecuaţia $x^2 + (2n-5)x + (n^2 - 6n + 7) = 0$ are două rădăcini reale $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ .... 1 p

(c) $I = 8e - 14$ .... 2 p

(d) Demonstrarea inegalităţii $0 \leq f(x) \leq 3e$, $\forall\, x \in [1, 2]$ .... 1 p

Calculul limitei .... 1 p

III. Geometrie. Oficiu .... 1 p

(a) Calculul ariei triunghiului ACE $(3\sqrt{3})$ .... 3 p

(b) $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 6$. .... 3 p

(c) $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .... 3 p

IV. Informatică. Oficiu .... 1 p

Generarea tuturor numerelor prime până la n .... 2 p

Eliminarea corectă a elementelor pentru o iteraţie .... 2 p

Efectuarea tuturor iteraţiilor pentru obţinerea soluţiei corecte .... 3 p

Programele nu au greşeli de limbaj .... 1 p

Claritatea rezolvărilor .... 1 p