Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p	**1.** Határozd meg az a valós szám értékét tudva, hogy 24, 1020 és a számok egy számtani haladvány egymásutáni tagjai, ebben a sorrendben.
5p	**2.** Határozd meg az m valós számot tudva, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$ függvényhez tartozó parabola érinti az Ox tengelyt!
5p	**3.** Oldd meg az $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}=27$ egyenletet a valós számok halmazán!
5p	**4.** Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{25}\right\}$ halmaz egy véletlenszerűen kiválasztott eleme racionális szám legyen!
5p	**5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(0,1)$, $B(-2,-1)$ és $C(2,3)$ pontok. Határozd meg az A ponton átmenő, a BC egyenesre merőleges egyenes egyenletét!
5p	**6.** Számítsd ki az ABC háromszög köré írt kör sugarának hosszát, ha $m(\sphericalangle A)=45°$ és $BC=2\sqrt{2}$.

II. FELADATSOR (30 pont)

	1. Adott az $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ mátrix, és az $\begin{cases}x+ay+a^2z=0\\ x-y+z=2\\ x+y-az=-4\end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a valós szám.
5p	**a)** Igazold, hogy $\det(A(0))=-1$.
5p	**b)** Igazold, hogy az $A(a)$ mátrix invertálható bármely a, $a\neq-1$ és $a\neq\frac{1}{3}$ valós szám esetén!
5p	**c)** Határozd meg azokat az a valós számokat, amelyekre az egyenletrendszernek egyetlen olyan (x_0,y_0,z_0) megoldása van, amelyre $x_0=y_0$.
	2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x*y=-xy+2x+2y-2$ asszociatív műveletet.
5p	**a)** Igazold, hogy $x*y=2-(x-2)(y-2)$, bármely x és y valós számokra!
5p	**b)** Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $x*x=1$.
5p	**c)** Ha m, n és p olyan egész számok, amelyekre $m*n*p=2$, igazold, hogy az m, n és p számok szorzata osztható 2-vel!

III. FELADATSOR (30 pont)

	1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x+1$ függvény.
5p	**a)** Igazold, hogy $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Határozd meg az f függvény grafikus képének $x=1$ abszcisszájú pontjában, az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!
5p	**c)** Igazold, hogy az $f(x)=0$ egyenletnek egyetlen megoldása van a $(0,1)$ intervallumban!
	2. Minden n természetes számra értelmezzük az $I_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3}dx$ számot.

5p	**a)** Igazold, hogy $I_0 = 1 + 3\ln\frac{3}{4}$.
5p	**b)** Bizonyítsd be, hogy $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+2}$, bármely n természetes szám esetén!
5p	**c)** Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$24+a=2\cdot 1020$ $a=2016$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=16-4m$ $16-4m=0\Rightarrow m=4$	**3p** **2p**
3.	$\left(3^{-1}\right)^{2x-3}=3^3\Leftrightarrow -2x+3=3$ $x=0$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 25 de elemente, deci sunt 25 de cazuri posibile Sunt 5 numere raționale în mulțimea A, deci sunt 5 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$d\perp BC\Rightarrow m_d\cdot m_{BC}=-1$ și, cum $m_{BC}=1$, obținem $m_d=-1$ Deoarece $A\in d$, ecuația dreptei d este $y-y_A=m_d\left(x-x_A\right)$, adică $y=-x+1$	**2p** **3p**
6.	$\dfrac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=$ $=2$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$ $=0+0+0-0-1-0=-1$	**2p** **3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&-1&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=(3a-1)(a+1)$ Pentru orice număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$, obținem $\det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	**2p** **3p**
c)	Sistemul are soluție unică, deci $a\neq -1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$; pentru fiecare număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$, obținem $x_0=\dfrac{-4a}{(3a-1)(a+1)}$ și $y_0=\dfrac{2(2-3a)}{3a-1}$ Cum $x_0=y_0\Leftrightarrow 3a^2-a-2=0$, obținem $a=-\dfrac{2}{3}$ sau $a=1$	**2p** **3p**

2.a)	$x*y=-xy+2x+2y-4+2=$	**2p**
	$=-x(y-2)+2(y-2)+2=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x*x=2-(x-2)^2$	**2p**
	$2-(x-2)^2=1\Leftrightarrow(x-2)^2=1\Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$	**3p**
c)	Cum $m*n*p=2+(m-2)(n-2)(p-2)$, obținem $(m-2)(n-2)(p-2)=0$	**2p**
	$m=2$ sau $n=2$ sau $p=2$, deci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'+(\ln x)'+1'=$	**2p**
	$=e^x+\dfrac{1}{x}+0=e^x+\dfrac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f(1)=e+1,\ f'(1)=e+1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=(e+1)x$	**3p**
c)	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(e^x+\ln x+1\right)=-\infty$, $f(1)>0$ și f este continuă, atunci ecuația $f(x)=0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$	**3p**
2.a)	$I_0=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x+3}dx=\int_0^1\left(1-\frac{3}{x+3}\right)dx=\left(x-3\ln(x+3)\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-3\ln4+3\ln3=1+3\ln\dfrac{3}{4}$	**2p**
b)	$I_{n+1}+3I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+2}+3x^{n+1}}{x+3}dx=\int_0^1\frac{x^{n+1}(x+3)}{x+3}dx=\int_0^1x^{n+1}dx=$	**3p**
	$=\dfrac{x^{n+2}}{n+2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural n	**2p**
c)	$nI_n=n\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+3}dx=\int_0^1\left(x^n\right)'\frac{x^2}{x+3}dx=x^n\cdot\frac{x^2}{x+3}\Big\vert_0^1-\int_0^1x^n\cdot\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}dx=\frac{1}{4}-\int_0^1x^n\left(1-\frac{9}{(x+3)^2}\right)dx$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Cum $0\le\displaystyle\int_0^1x^n\left(1-\frac{9}{(x+3)^2}\right)dx\le\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n, obţinem $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=\dfrac{1}{4}$	**3p**