# Examenul de bacalaureat naţional 2016
## Proba E. c)
## Matematică *M_tehnologic*

**Varianta 5**

***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** **1.** Arătaţi că $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{12}=1$.

**5p** **2.** Arătaţi că $4\left(x_1+x_2\right)-3x_1x_2=2$, unde $x_1$ și $x_2$ sunt soluțiile ecuației $x^2-5x+6=0$.

**5p** **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1}=2$.

**5p** **4.** După o ieftinire cu $10\%$, preţul unui obiect este 90 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(5,1)$ și $B(3,1)$. Calculați lungimea segmentului $AB$.

**5p** **6**. Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{4}{5}$, arătați că $\sin x=\frac{3}{5}$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x&1\\1&x\end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det A=-5$.

**5p** **b)** Arătați că $A\cdot B=B\cdot A$, pentru orice număr real $x$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $x$, pentru care $A\cdot A-3\left(A+B\right)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{3}xy+x+y$.

**5p** **a)** Arătaţi că $1*(-3)=-3$.

**5p** **b)** Demonstraţi că $x*y=\frac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **c)** Determinați numerele reale nenule $x$, pentru care $x*\frac{1}{x}=-3$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+3x}{x}=0$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(x)\geq -2$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+x+1$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-x-1\right)dx=\frac{1}{5}$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\int_1^e\left(f(x)-x^4-1\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

**5p** **c)** Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuaţii $x=0$ și $x=1$.

**Examenul de bacalaureat naţional 2016**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_tehnologic***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 5**

***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ | **3p** |
| | $\frac{1}{12}:\frac{1}{12}=1$ | **2p** |
| **2.** | $x_1+x_2=5$, $x_1x_2=6$ | **2p** |
| | $4(x_1+x_2)-3x_1x_2=4\cdot 5-3\cdot 6=2$ | **3p** |
| **3.** | $x-1=4$ | **3p** |
| | $x=5$, care verifică ecuația | **2p** |
| **4.** | $p-10\%\cdot p=90$, unde $p$ este prețul obiectului înainte de ieftinire | **3p** |
| | $p=100$ de lei | **2p** |
| **5.** | $AB=\sqrt{(3-5)^2+(1-1)^2}=$ | **3p** |
| | $=2$ | **2p** |
| **6.** | $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$ | **3p** |
| | Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{3}{5}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det A=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-3\cdot 3=$ | **3p** |
| | $=4-9=-5$ | **2p** |
| **b)** | $A\cdot B=\begin{pmatrix}2x+3 & 2+3x\\ 3x+2 & 3+2x\end{pmatrix}$ | **2p** |
| | $B\cdot A=\begin{pmatrix}2x+3 & 3x+2\\ 2+3x & 3+2x\end{pmatrix}=A\cdot B$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |
| **c)** | $A\cdot A=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 12 & 13\end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix}2+x & 4\\ 4 & 2+x\end{pmatrix}$ | **2p** |
| | $A\cdot A-3(A+B)=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}13-3(2+x) & 12-12\\ 12-12 & 13-3(2+x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$ | **3p** |
| **2.a)** | $1*(-3)=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(-3)+1+(-3)=$ | **3p** |
| | $=-1+1+(-3)=-3$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $x * y = \frac{1}{3}xy + x + y + 3 - 3 = \frac{1}{3}(xy + 3x + 3y + 9) - 3 =$ | **3p** |
| | $= \frac{1}{3}(x(y+3) + 3(y+3)) - 3 = \frac{1}{3}(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **2p** |
| **c)** | $\frac{1}{3}(x+3)\left(\frac{1}{x}+3\right) - 3 = -3 \Leftrightarrow (x+3)\left(\frac{1}{x}+3\right) = 0$ | **3p** |
| | $x = -3$ sau $x = -\frac{1}{3}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x) = 3x^2 - 3 =$ | **3p** |
| | $= 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) + 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x} =$ | **2p** |
| | $= \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ | **3p** |
| **c)** | $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$ | **2p** |
| | $x \in [-1,1] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci $f$ este descrescătoare pe $[-1,1]$ | **1p** |
| | $x \in [1,+\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci $f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$ | **1p** |
| | Cum $f(1) = -2$, obținem $f(x) \geq -2$, pentru orice $x \in [-1,+\infty)$ | **1p** |
| **2.a)** | $\int_0^1 (f(x) - x - 1)\,dx = \int_0^1 (x^4 + x + 1 - x - 1)\,dx = \int_0^1 x^4\,dx =$ | **2p** |
| | $= \frac{x^5}{5}\Big\vert_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$ | **3p** |
| **b)** | $\int_1^e (f(x) - x^4 - 1)\ln x\,dx = \int_1^e x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx =$ | **3p** |
| | $= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$ | **2p** |
| **c)** | $\mathcal{A} = \int_0^1 \lvert f(x)\rvert\,dx = \int_0^1 (x^4 + x + 1)\,dx = \frac{x^5}{5}\Big\vert_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big\vert_0^1 + x\Big\vert_0^1 =$ | **3p** |
| | $= \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{17}{10}$ | **2p** |