Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=22$.
5p	**2.** Calculați produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+2$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-6x+6\right)=\log_3 1$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 5, 7, 8 și 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$ și $B(1,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.
5p	**6**. Arătați că $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2+x\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numărul real a, $a\neq -1$, știind că $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+2$, unde m este număr real.
5p	**a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.
5p	**b)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Pentru $m=3$, descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x-1)$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=0$.

5p	**b)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria egală cu e.
5p	**c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{1}\left(f(x)+e^{x}\right)dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{2}-3\right)^2=11-6\sqrt{2}$	**2p**
	$\left(\sqrt{2}+3\right)^2=11+6\sqrt{2}\Rightarrow\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=11-6\sqrt{2}+11+6\sqrt{2}=22$	**3p**
2.	$f(-1)=0$	**3p**
	$f(-1)f(0)f(1)=0$	**2p**
3.	$x^2-6x+6=1\Rightarrow x^2-6x+5=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=5$, care verifică ecuația dată	**3p**
4.	Cifra unităților este 8	**2p**
	Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în 3 moduri și, pentru fiecare alegere a acesteia, cifra sutelor poate fi aleasă în câte 2 moduri, deci se pot forma $3\cdot 2\cdot 1=6$ astfel de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_d=m_{AB}\Rightarrow m_d=1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y=x$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(3\pi-\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(3\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$	**3p**
	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&x&x^2+x\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y&y^2+y\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y+x&y^2+y+2xy+x^2+x\\0&1&2y+2x\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&x+y&(x+y)^2+(x+y)\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=$ $=A\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}\right)=A\left(\frac{2016}{2017}\right)$	**3p**
	$A\left(\frac{2016}{2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)\Leftrightarrow a=2016$	**2p**

2.a)	$f(1)=0 \Leftrightarrow 1^4+m\cdot 1^2+2=0$	**2p**
	$m=-3$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3+x_4=0$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=0$, pentru orice număr real m	**3p**
c)	$f=X^4+3X^2+2=(X^2+1)(X^2+2)$	**3p**
	Polinoamele X^2+1 și X^2+2 au coeficienți reali, au gradul 2 și nu au rădăcini reale, deci sunt ireductibile în $\mathbb{R}[X]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=x$	**3p**
c)	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$ și funcția f este continuă, atunci pentru orice $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^2 f(x)e^{-x}dx=\int\limits_0^2 e^x(x-1)e^{-x}dx=\int\limits_0^2(x-1)dx=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\right\|_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{2}-2=0$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int\limits_1^2\|f(x)\|dx=\int\limits_1^2(x-1)e^xdx=(x-2)e^x\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=0-(-1)e=e$	**2p**
c)	$\int\limits_{-n}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\int\limits_{-n}^1 xe^xdx=(x-1)e^x\Big\|_{-n}^1=(n+1)e^{-n}$	**3p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{e^n}=0$	**2p**