Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1-i$. Arătați că $z^2=-2i$.

5p **2.** Calculați $(g\circ f)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2016$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-2016$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-3x}=3^{x-4}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d, care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=3x-2016$.

5p **6.** Determinaţi aria triunghiului ABC, ştiind că $AB=6$, $AC=4$ și $A=\dfrac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-3xy+9x+9y-24$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x*x)*x=12$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3(x^3-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2=(1-i)^2=1-2i+i^2=$ $=1-2i-1=-2i$	**2p** **3p**
2.	$f(0)=2016$ $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(2016)=0$	**2p** **3p**
3.	$x^2-3x=x-4 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea M are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile În mulțimea M sunt 10 pătrate perfecte, deci sunt 10 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$	**1p** **2p** **2p**
5.	Panta unei drepte paralele cu dreapta d este egală cu 3 Ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta d este $y=3x+1$	**2p** **3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{6\cdot 4\cdot \sin\frac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{6\cdot 4\cdot \frac{1}{2}}{2}=$ $=6$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$ $=2-(-2)=4$	**2p** **3p**
b)	$A(1+m)+A(1-m)=\begin{pmatrix}1+m-1 & -1\\ 2 & 1+m-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-m-1 & -1\\ 2 & 1-m-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & -2\end{pmatrix}=$ $=2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=2A(1)$, pentru orice număr real m	**3p** **2p**
c)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}m-1 & -1\\ 2 & m-2\end{vmatrix}=m^2-3m+4$ Pentru orice număr real m, $m^2-3m+4\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	**2p** **3p**
2.a)	$x*y=-3xy+9x+9y-27+3=$ $=-3x(y-3)+9(y-3)+3=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
b)	$(x*y)*z=(-3(x-3)(y-3)+3)*z=9(x-3)(y-3)(z-3)+3$ $x*(y*z)=x*(-3(y-3)(z-3)+3)=9(x-3)(y-3)(z-3)+3=(x*y)*z$, pentru orice numere reale x, y și z, deci legea de compoziție „$*$” este asociativă	**2p** **3p**

c)	$(x*x)*x=9(x-3)^3+3$	**2p**
	$9(x-3)^3+3=12 \Leftrightarrow (x-3)^3=1 \Leftrightarrow x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}=$	**3p**
	$=\frac{3x^3-3}{x}=\frac{3(x^3-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^3-3\ln x\right)=+\infty$	**2p**
	Dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$	**1p**
	$x\in(0,1] \Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**1p**
	$x\in[1,+\infty) \Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1)=1$, obținem $f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 \left(x^2+3x+3\right) f(x)\,dx=\int_1^2 (2x+3)\,dx=\left(x^2+3x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=10-4=6$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_0^3 \lvert f(x)\rvert\,dx=\int_0^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx=\ln\left(x^2+3x+3\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\ln 21-\ln 3=\ln 7$	**2p**
c)	$\int_{-1}^0 f'(x) f(x)\,dx=\frac{1}{2} f^2(x)\Big\vert_{-1}^0=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(-1)\right)=\frac{1}{2}(1-1)=0$	**2p**