Subiecte posibile Bacalaureat 2016

M_mate-info pentru filiera teoretică , specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. a) Să se calculeze suma primilor 30 de termeni ai unei progresii aritmetice dacă $a_8+a_{13}+a_{18}+a_{23}=30$.
   b) Determinați primul termen și rația unei progresii geometrice dacă $b_2+b_5-b_4=10$ și $b_3+b_6-b_5=20$.
   c) Să se calculeze $|z|$, dacă $z+2\overline{z}=3-i$.
   d) Determinați partea întreagă și partea fracțională a numărului $x=\frac{3}{2-\sqrt{3}}$.
2. a) Se consideră funcția de gradul II, $f:R\to R, f(x)=x^2-mx+m+1$. Să se determine m>0 dacă graficul funcției f este tangent dreptei y=1.
   b) Se consideră ecuația $x^2-4x+2=0$, cu rădăcinile x_1, x_2. Să se arate că $x_1^3+x_2^3\in Z$.
   c) Se consideră ecuația $x^2-mx+10=0$, $\in R$, cu rădăcinile x_1, x_2 . Să se determine cel mai mic număr întreg m pentru care $x_{1,}x_2$ nu sunt reale .
   d) Se consideră funcția $:R\to R, f(x)=x^2-mx+4$. Să se determine $m\in R$, dacă distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției cu axa Ox este 3 .
3. Să se rezolve ecuațiile :
   a) $x+\sqrt{4x+1}=5$
   b) $log_{1-x}(x^2-3x-4)=2$.
   c) $4^x+3^x\cdot 2^{x+1}=3\cdot 9^x$
   d) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, pentru $x\in[0,3\pi)$
4. a) Se consideră funcția $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5,\}$. Să se determine numărul funcțiilor cu proprietatea că f(1) este o valoare pară, iar f(4) este o valoare impară .
   b) Determinați probalitatea ca alegând un număr din mulțimea {1,2,…,100}, acesta sa fie divizibil cu 6 sau cu 8 .
   c) Să se determine numărul termenilor iraționali din dezvoltarea $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[5]{3})^{60}$.
   d) Se consideră mulțimea A={1,2,3,…,9} . Să se determine probabilitatea ca alegând o submulțime de cinci elemente, dintre toate submulțimile nevide, aceasta să conțină exact 2 valori impare .
5. a) Se consideră punctele A(3,0), B(1,3) și C(-3,-1) . Să se determine ecuația înălțimii din A, a paralelei prin C la AB și ecuația mediatoarei segmentului AC .
   b) Se consideră punctele A(-5,3) și B(-2,-1) . Să se determine coordonatele punctului M dacă este îndeplinită relația $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BM}$.
   c) Se consideră vectorii $\vec{u}=2m\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$ și $\vec{v}=m\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$. Să se determine m daca $\vec{u}$ este perpendicular pe $\vec{v}$, iar pentru m=3 să se determine cosinusul unghiului format de cei doi vectori .
   d) Se consideră punctele A(1,3) , B(3,5) și C(4,0) . Să se determine lungimea înălțimiii din A și a medianei din A.
6. a) Se consideră triunghiul ABC având laturile AB=4, AC=2 și măsura unghiului $A=\frac{\pi}{3}$. Să se calculeze raza cercului înscris, raza cercului circumscris triunghiului , lungimea laturii BC, înălțimea din A și lungimea medianei din B.
   b) Dacă $a\in(\pi,\frac{3\pi}{2}), \sin(a)=\frac{-3}{5}$, să se calculeze $tg(a), \sin(2a), \cos(2a)\, și\, tg\,\frac{a}{2}$.
   c) Să se calculeze $sin70^\circ\cdot cos80^\circ+cos10^\circ\cdot cos70^\circ$.
   d) Să se arate că $(\forall)x\in R$ are loc relația $\sin(2x)+\sqrt{3}\cos(2x)=2\sin\,(2x+\frac{\pi}{3})$.

Prof. Aurelian Răducu, Colegiul Național “Alexandru Odobescu”, Pitești

Subiectul II

1. Se considera permutarea $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & a & 5 & 3 & b & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in S_6$.
   a) Să se determine a și b astfel încât permutarea α sa fie o permutare pară .
   b) Pentru a și b determinate anterior să se determine semnul permutării si α^{-1} .
   c) Să se calculeze α^{2016}, pentru a=6 și b=4 .
   d) Să se arate că pentru a=4 și b=6, ecuația $x^2 = \alpha$ nu are soluții, unde $x \in S_6$.
2. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} / \ x, y \in Z \text{ și } \ x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$ și $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Să se arate că $A \in M$.
   b) Dacă $X \cdot A = A \cdot X$, atunci există a și b numere reale astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$.
   c) Să se rezolve ecuația $X^2 = A, X \in M_2(R)$.
   d) Să se arate că mulțimea M este infinită .
3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & x & -1 \\ m & 3 & x \end{pmatrix}$, cu $m \in R$ $și$ $x \in R$.
   a) Să se rezolve ecuația det(A)=0, pentru m=1 .
   b) Să se determine $m \in R$ astfel încât A sa fie inversabilă $(\forall) x \in R$.
   c) Pentru m=0 și x=1 să se determine A^{-1} .
4. Considerăm sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx + y + z = m - 1 \\ x + my + 2z = -1 \end{cases}$, $m \in R$, iar A este matricea coeficienților .
   a) Să se determine $m \in R$ pentru care sistemul are solutie unică .
   b) Să se arate ca $(\forall)$ $m \in R$ sistemul este compatibil .
   c) Să se rezolve sistemul pentru m=1, soluții care verifică relația $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6$.
   d) Pentru m=2, să se determine soluția sistemului știind că tripletul (x_0, y_0, z_0) formează o progresie aritmetică .

5. Pe mulțimea R se definește legea de compoziție $x * y = 3xy + 3x + 3y + 2$.
   a) Să se arate că legea este asociativă, comutativă și determinați elementul neutru .
   b) Să se rezolve ecuația $(x^2 - 2) * 5 = -1$.
   c) Să se rezolve ecuația $x * x = x'$, unde x' este simetricul lui x .
   d) Să se calculeze valoarea expresiei $(-2016) * (-2015) * \dots * (0) * (1) * \dots * (2016)$
   e) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{2016\ ori} = 3^{2015} - 1$.
   f) Să se arate că $(\exists)$ $a, b \in Q \backslash Z$ $a.î.$ $a * b \in Z$.
6. Fie $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1+4x & 0 & 8x \\ 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1-2x \end{pmatrix} / \, x \in R \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\}$.
   a) Să se arate că $A(x) \cdot A(y) \in G, (\forall)\, x, y \in R \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$
   b) Să se determine elemental simetrizabil pentru $A(2)$.
   c) Să se calculeze $det(A^{2016}(-1))$
   d) Să se determine elementele de ordin 2 ale grupui G, în raport cu înmulțirea matricelor .

Prof. Aurelian Răducu, Colegiul Național “Alexandru Odobescu”, Pitești

7. Se consideră polinomul $f \in R[x]$, $f = 3X^4 - 2X^3 + X^2 + aX - 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C$.
   a) Calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.
   b) Pentru a=3 să se calculeze produsul $P = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4)$.
   c) Determinati $a \in R$, dacă polinomul $g = f(x) + 7$ este divizibil cu $(x-1)^2$.
   d) Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$.
   e) Să se arate că polinomul f nu are toate rădăcinile reale .
   f) Să se arate că $(\forall)\ a \in R,\ f$ nu este divizibil cu x^2-1 .
8. Fie $f, g \in Z_5[x]$, $f = x^3 + ax^2 + x + \hat{1},\ g = x + \hat{3}$
   a) Să se determine $a \in Z_5$ dacă f *divizibil cu* g .
   b) Pentru $a = \hat{1}$ să se determine forma ireductibilă a lui f .
   c) Să se determine rădăcinile polinomului pentru $a = \hat{2}$.
   d) Să se arate că $(\forall)\ a \in Z_5$, funcția asociată polinomului nu este injectivă
   e) Pentru $a = \hat{3}$ să se determine $Im(f)$.

Subiectul III

1. Fie șirul $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n}$, $(\forall)\ n \in N^*$.
   a) Să se studieze monotonia șirului
   b) Să se arate că a_n este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
   c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{a_n}{2}\right)$.
   d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)\cdot n$.
2. Se consedera funcția $f: R \to R, f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$
   a) Să se determine asimptotele funcției .
   b) Să se determine ecuația tangentei în punctul $x = \frac{1}{2}$.
   c) Să se determine intervalele de monotonie și punctele de extrem .
   d) Să se determine mulțimea valorilor funcției .
   e) Să se arate că $f(x) + \sqrt{3} \geq 0$, $(\forall)\ x \in R$.
   f) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x))^x$.
   g) Să se arate că ecuația $f(x) = -x$ are soluție unică în (0,1) .
3. Se consideră funcția funcția $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x-2} & ; x \in (-\infty, 1] \\ \ln(x) - 2 & ; x \in (1, \infty) \end{cases}$
   a) Să se determine $a \in R$ a.î. f să admită primitive .
   b) Pentru a=1 să se determine o primitivă a funcției f, cu proprietatea că $F(e) = -2e$.
   c) Să se calculeze $\int_0^1 (x-2)f(x)\,dx$.
   d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x (f(t) + 2)dt$.
   e) Să se arate că funcția $g(x) = x\ln(x) - 3x + 4$, este o primitivă a funcției f pentru x>1 .
4. Fie $f_n: [0,1] \to R, f_n(x) = x^n e^x$ și $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx,\ (\forall)\ n \in N^*$.
   a) Să se calculeze $\int_0^1 e^{-x} f_1(x)dx$.
   b) Se se calculeze I_1, I_2 .
   c) Să se arate că I_n este convergent .
   d) Să se arate că $I_n + nI_{n-1} = e$.
   e) Să se calculeze limitele $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)I_n$.
   f) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x f_1(t)dt}{x^2}$.

Prof. Aurelian Răducu, Colegiul Național “Alexandru Odobescu”, Pitești

5. Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to R, f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$.
   a) Să se calculeze $\int_1^e (x^2+1)f(x)dx$.
   b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.
   c) Să se determine volumul determinat de funcția $g(x) = xf(x)\ pentru\ x \in [1,e]$.
   d) Să se determine aria suprafeței determinată de funcția $g(x) = xf(x)\ pentru\ x \in [0,1]$.
6. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{x^2+1}\,dx$, $n \in N$.
   a) Calculați I_0, I_1, I_2 .
   b) Să se studieze monotonia lui I_n .
   c) Să se arate că I_n este mărginit .
   d) Să se arate că $(n+2)I_n$=$2\sqrt{2}-(n-1)I_{n-2}$.
   e) Să se calculeze limitele $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.
7. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(x)\,dx$, $n \in N$
   a) Calculați I_1, I_2, I_3 .
   b) Să se arate că I_n este convergent .
   c) Să se arate că $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
8. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^n}{x^2+3x+2}dx$, n ∈N .
   a) Calculați I_0, I_1, I_2, I_3 .
   b) Să se arate că I_n este convergent .
   c) Să se arate că $I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n = \frac{1}{n+1}$.
   d) Să se calculeze limitele $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.