OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE MATEMATICĂ- ETAPA NAŢIONALĂ

CLASA a VII-a

11.06.2016

Problema 1.(7 puncte)

Să se determine $x \in Z$ *astfel încât* $S = \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} + \cdots + \frac{x}{1+2+3+\cdots+2015} \in Z$.

Soluție: $S = \frac{x}{\frac{2\cdot 3}{2}} + \frac{x}{\frac{3\cdot 4}{2}} + \cdots + \frac{x}{\frac{2015\cdot 2016}{2}}$..**2p**

$S = 2x \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}\right)$..**2p**

$S = x \cdot \frac{2014}{2016}$..**1p**

$S \in Z \Rightarrow x \in M_{1008}$ **2p**

Problema 2.(7 puncte)

În triunghiul ABC se consideră $E \in (BC), AE \perp BC$ *şi* $m(\sphericalangle EAB) = 60°$. *Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic în unghiul A dacă şi numai dacă* $4 \cdot CE = BC$.

Soluție: desen corect...**1p**

"⇒" $m(\sphericalangle ABE) = 30° \Rightarrow 2 \cdot AC = BC$ **1p**

$m(\sphericalangle EAC) = 30° \Rightarrow 2 \cdot CE = AC$, deci $4 \cdot CE = BC$ **2p**

"⇐" fie $AE = x \Rightarrow AB = 2x, BE = x\sqrt{3}, CE = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ **1p**

$AC = \frac{2x\sqrt{3}}{3} \overset{R.T.Pit.}{\Rightarrow} \Delta ABC$ dreptunghic în A...**2p**

Problema 3.(7 puncte)

Aflaţi câte numere de forma $\overline{abc}$ *există astfel încât* $\sqrt{\overline{a,b(c)} + \overline{b,c(a)} + \overline{c,a(b)}} \in Q$

Soluție:

$\overline{a,b(c)} + \overline{b,c(a)} + \overline{c,a(b)} = a + b + c + \frac{a+b+c}{9} = \frac{10(a+b+c)}{9}$...**2p**

$\sqrt{\frac{10(a+b+c)}{9}} \in Q \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10(a+b+c)}}{3} \in Q \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 10(a+b+c) \text{ este pătrat perfect} \\ 3 \le a+b+c \le 27 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b+c = 10$.........................**3p**

Pentru a=1 avem b+c=9 (8 posibilităţi), a=2 avem b+c=8 (7 posibilităţi),..., a=8 avem b+c=2 (1 posibilitate), deci în total avem 1+2+3+4+5+6+7+8=36 de posibilităţi...**2p**

Problema 4.(7 puncte)

Dreptunghiul ABCD de dimensiuni AB=l şi BC=L, are aria egală cu $l^2\sqrt{2}$. *Notăm cu M mijlocul laturii AD şi* $\{P\} = BM \cap AC$.

a) Demonstraţi că $BM \perp AC$;

b) Aflaţi ce procent reprezintă aria triunghiului MPC din aria dreptunghiului.

Soluție: desen corect...**1p**

a) $L = l\sqrt{2},\ AC = BD = l\sqrt{3}$...**1p**

Fie $\{O\} = BD \cap AC, AO = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ mediană în $\Delta ABC \Rightarrow AP = \frac{2}{3} \cdot AO = \frac{l\sqrt{3}}{3}$....................................**1p**

$BM = \frac{l\sqrt{6}}{2}$ mediană în $\Delta ABD \Rightarrow BP = \frac{2}{3} \cdot BM = \frac{l\sqrt{6}}{3}$..**1p**

Din Reciproca T. lui Pitagora în $\Delta ABP \Rightarrow$ triunghiul este dreptunghic, deci $BP \perp AP \Rightarrow BM \perp AC$...............**1p**

b) $PM = \frac{l\sqrt{6}}{6}, CP = \frac{2l\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A_{MPC} = \frac{l^2\sqrt{2}}{6}$ **1p**

$p = 16,(6)\%$...**1p**

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine"
Anton Pann

Felicitări!