Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_2 = 4$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1,a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{x-2}=3^{2-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 30.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta egală cu 1.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=10$, $AC=10$ și $BC=12$. Arătaţi că $\sin B=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}-m & 1 & 1\\ 1 & -m & 1\\ 1 & 1 & -m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}-mx+y+z=-1\\ x-my+z=-1\\ x+y-mz=m\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m, $m\neq -1$ și $m\neq 2$.

5p **c)** Pentru $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0+2y_0+3z_0=9$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-2xy+10x+10y-45$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=5$.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale m și n, pentru care $m*n=27$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are două soluţii reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x-4)}$.

5p **a)** Arătați că $\int_5^{10}(x-4)f(x)dx=\ln 2$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[5,6]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\,f(x)$.

5p **c)** Demonstraţi că $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2\int_n^{n+1}f(x)dx\right)=1$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=4-1=3$ $a_4=1+3\cdot 3=10$	**2p** **3p**
2.	$f(1)=a\Rightarrow 1^2+4=a$ $a=5$	**3p** **2p**
3.	$3^{2(x-2)}=3^{2-x}\Leftrightarrow 2x-4=2-x$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Sunt 21 de numere naturale de două cifre care sunt mai mici sau egale cu 30, deci sunt 21 de cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{21}{90}=\dfrac{7}{30}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$y-3=1\cdot(x-0)$ $y=x+3$	**3p** **2p**
6.	$AD=8$, unde $AD\perp BC$, $D\in BC$ $\sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{4}{5}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$ $=0+1+1-0-0-0=2$	**2p** **3p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}-m&1&1\\1&-m&1\\1&1&-m\end{vmatrix}=(2-m)(m+1)^2$ Pentru orice număr real m, $m\neq -1$ și $m\neq 2$, obținem $\det(A(m))\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	**3p** **2p**
c)	Pentru $m=2$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1+\alpha,1+\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$ Cum $x_0+2y_0+3z_0=9\Leftrightarrow 1+\alpha+2(1+\alpha)+3\alpha=9\Leftrightarrow \alpha=1$, soluția sistemului care verifică relația este $(2,2,1)$	**3p** **2p**
2.a)	$x*y=-2xy+10x+10y-50+5=$ $=-2x(y-5)+10(y-5)+5=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**

b)	$x*5=5*y=5$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$((1*2*3*4)*5)*6*7*8*9*10=5*(6*7*8*9*10)=5$	**3p**
c)	$-2(m-5)(n-5)+5=27 \Leftrightarrow (m-5)(n-5)=-11$	**2p**
	Cum m și n sunt numere naturale, obținem $m=4$, $n=16$ sau $m=16$, $n=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-\frac{8}{x}=$	**2p**
	$=\frac{2x^2-8}{x}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Cum $x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$	**1p**
	$x\in(0,2]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,2]$	**2p**
	$x\in[2,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2-8\ln x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{8\ln x}{x^2}\right)=+\infty$	**2p**
	Cum $f(2)<0$, ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_5^{10}(x-4)f(x)dx=\int_5^{10}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_5^{10}=$	**3p**
	$=\ln 10-\ln 5=\ln 2$	**2p**
b)	$g(x)=\frac{1}{x-4}$, deci $V=\pi\int_5^6 g^2(x)dx=\pi\int_5^6\frac{1}{(x-4)^2}dx=$	**2p**
	$=\pi\left(-\frac{1}{x-4}\right)\Big\vert_5^6=\frac{\pi}{2}$	**3p**
c)	Pentru $n>4$, $\int_n^{n+1} f(x)dx=\int_n^{n+1}\frac{1}{x(x-4)}dx=\frac{1}{4}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\frac{n^2-3n}{n^2-3n-4}$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)dx\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{4}{n^2-3n-4}\right)^{\frac{n^2-3n-4}{4}}\right)^{\frac{4n^2}{4\left(n^2-3n-4\right)}}=\ln e=1$	**3p**