Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}=9$.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $M(m,4)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4\left(x^2+9\right)=\log_4 25$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să fie divizibil cu 2.

5p **5.** Determinaţi numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}-6\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{1}{2}$, arătaţi că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & 2x\\ -6x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A(0)\right)=1$.

5p **b)** Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi numărul real x, ştiind că $A\left(2^x\right)A\left(2^x\right)=A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(-1)+f(1)=2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-2X+2.

5p **c)** Demonstraţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_1x_3=-5$, pentru orice număr real a, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x-11}{x-3}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(\pi)>13$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3x+1)e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m, pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x+m)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi numărul real nenul a, ştiind că $\int_0^a f(x)\,dx=3a$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{5}+2\right)^2=9+4\sqrt{5}$	**3p**
	$9+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}=9$	**2p**
2.	$f(m)=4\Rightarrow m+2=4$	**3p**
	$m=2$	**2p**
3.	$x^2+9=25\Rightarrow x^2-16=0$	**2p**
	$x=-4$ sau $x=4$, care verifică ecuația	**3p**
4.	Mulțimea M are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 4 numere divizibile cu 2, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{9}$	**2p**
5.	$\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{-3}{-6}$	**3p**
	$a=2$	**2p**
6.	Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot1-0\cdot0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+3x&2x\\-6x&1-4x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+3y&2y\\-6y&1-4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3x+3y-3xy&2x+2y-2xy\\-6x-6y+6xy&1-4x-4y+4xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+3(x+y-xy)&2(x+y-xy)\\-6(x+y-xy)&1-4(x+y-xy)\end{pmatrix}=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(2^x+2^x-2^x\cdot2^x\right)=A(1)\Leftrightarrow 2^x+2^x-2^x\cdot2^x=1$	**3p**
	$\left(2^x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=0$	**2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^3-(-1)^2+a\cdot(-1)+2=-a$	**2p**
	$f(1)=1^3-1^2+a\cdot1+2=a+2\Rightarrow f(-1)+f(1)=-a+a+2=2$, pentru orice număr real a	**3p**
b)	Restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2-2X+2 este aX	**3p**
	Polinomul f este divizibil cu polinomul $X^2-2X+2\Leftrightarrow a=0$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=a \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2a$	**3p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-a\left(x_1+x_2+x_3\right)-6=1-2a-a-6=-3a-5$	**1p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3+3\left(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\right)=-3a-5+3a=-5$, pentru orice număr real a	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x-3)-\left(x^2+2x-11\right)}{(x-3)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-11}{x(x-3)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-11-x^2+3x}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-11}{x-3}=5$, deci dreapta de ecuație $y=x+5$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(3,5)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(3,5)$	**3p**
	Cum $3<\pi<4$ şi $f(4)=13$, obținem $f(\pi)>13$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1\dfrac{1}{e^x}f(x)dx=\int\limits_0^1(3x+1)dx=$	**2p**
	$=\left(\dfrac{3x^2}{2}+x\right)\Bigg\vert_0^1=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$	**3p**
b)	$F'(x)=(3x+m)'e^x+(3x+m)\left(e^x\right)'=3e^x+(3x+m)e^x=(3x+m+3)e^x$	**3p**
	$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow(3x+m+3)e^x=(3x+1)e^x$, pentru orice număr real x, deci $m=-2$	**2p**
c)	$\int\limits_0^a(3x+1)e^xdx=(3x-2)e^x\Big\vert_0^a=(3a-2)e^a+2$	**2p**
	$(3a-2)e^a+2=3a\Leftrightarrow(3a-2)\left(e^a-1\right)=0$ şi, cum a este număr real nenul, obținem $a=\dfrac{2}{3}$	**3p**