

PROBLEME PROPUSE PENTRU GIMNAZIU ¹⁾

CLASA a V-a

1. Scrie numarul 100^{2014} ca o sumă de patru cuburi perfecte.
Crăciun Gheorghe, Ploiești

2. Să se afle toate numerele naturale \overline{abc} pentru care $3^a + b^c = \overline{bc}$.
Nicolae Ivășchescu, Canada

3. Determinați numerele de forma \overline{abc} știind că: $a^a = a + 2b + 3c$.
Gheorghe Achim, Mizil

4. Într-o operație de împărțire suma dintre deîmpărțit și împărțitor este 2006, câtul este 14 și restul este 101. Aflați deîmpărțitul și împărțitorul.
Liviu Ardelean, Sibiu

5. Fie numărul $N = 2 \cdot (10^{2007} - 1)$.
i) Aflați prima și ultima cifră a numărului N .
ii) Arătați că numărul N nu este pătrat perfect.
Liviu Ardelean, Sibiu

6. La împărțirea a două numere naturale obținem un cât și restul 15. Dacă la acest rest s-ar adăuga 2, atunci unul dintre numere ar fi de 6 ori mai mare decât celălalt. Să se reconstituie împărțirea.
Eugen Niță, Ploiești

7. Un sportiv se antrenează urcând o scară în felul următor: urcă 5 trepte, coboară 4 și urcă 2, după care repetă exercițiul. Câte trepte are scara dacă pentru parcurgerea ei sportivului îi sunt necesari 150 de pași? (pas înseamnă urcarea sau coborârea unei trepte).
Veronica Iancu, Ploiești

8. Arătați că numărul $3^1 + 3^2 + \dots + 3^{1960} + 3^{1961}$ nu este pătrat perfect.
Dorina Stoica, Mircea Mario Stoica, Arad

9. Un elev a cumpărat 5 caiete și 2 pixuri și a cheltuit suma de 34 lei. Știind că un pix costă de 3 ori mai puțin decât un caiet, să se afle prețul fiecăruia.
Felicia Ozunu, Vulcan

10. Să se determine cifrele a, b și c care verifică inegalitatea:
 $a \cdot \overline{bc} + b \cdot \overline{ca} + c \cdot \overline{ab} \geq 2673$.
Roxana Georgescu, Ploiești

11. În urmă cu 35 de ani, unchiul Marcel avea vârsta nepoatei de acum. Determinați vârsta, în prezent, a fiecăruia, știind că peste 10 luni, nepoata va împlini o vârstă de 7 ori mai mică decât cea a unchiului.
Eugen Niță, Ploiești

12. Aflați toate perechile de numere naturale (a,b) pentru care
 $(a + 5) \times (b + 6) = 45$.
Sergiu Cristea, Ploiești

1) Se primesc soluții până la 20 martie 2016

CLASA a VI-a

1. Să se afle numărul natural x pentru care $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+x} = \frac{2016}{1009}$.
Nicolae Ivășchescu, Canada
-
2. Să se determine numerele prime x și y știind că $x^{2y+1} - x^y = 2016$
Eugeniu Blăjuț, Bacău
-
3. Rezolvați ecuația: $(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 2012 \cdot 2013) \cdot x = 2012 \cdot 671 \cdot 2014$
Nicolae Ivășchescu, Canada
-
4. Să se determine numărul \overline{abcd} pentru care avem $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2016$
Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești
-
5. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $A_n = \underbrace{11\dots1}_{n+1} \cdot \underbrace{55\dots5}_{n+1}$ este pătrat perfect.
Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești
-
6. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$. Să se determine numărul de elemente al mulțimii $B = \left\{ n \in A \mid \frac{4n+2}{5n+4} \text{ se simplifică cu } 3 \right\}$.
Valentina Soare, Ploiești
-
7. Arătați că fracția $\frac{61n+2}{63n+3}$ este reductibilă pentru orice n număr natural.
Dorina Stoica, Mircea Mario Stoica, Arad
-
8. Considerăm punctele coliniare A, B, C, D în această ordine. Stabiliți dacă relația $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ este adevărată.
Roxana Georgescu, Ploiești
-
9. Să se afle măsurile a trei unghiuri formate în jurul unui punct știind că al doilea unghi este de două ori mai mare decât primul unghi, iar al treilea unghi este cu 60° mai mare decât primul.
Veronica Iancu, Ploiești
-
10. a) Arătați că: $\frac{n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
b) Se dau numerele: $a = \frac{1}{1} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4} - \frac{4}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7} - \frac{7}{8 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{2014} - \frac{2014}{2015 \cdot 2016}$ și $b = \frac{1}{673} + \frac{1}{674} + \dots + \frac{1}{2015}$. Arătați că inversul diferenței numerelor a și b este un număr natural, care are 36 de divizori naturali.
Roxana Georgescu, Ploiești
-
11. Să se arate că mulțimea $A = \left\{ \frac{993}{2}, \frac{994}{3}, \frac{995}{4}, \dots \right\}$ conține un singur număr natural.
Ionel Patriche, Galați

CLASA a VII-a

1. Să se rezolve în \mathbb{N} ecuația: $12n! = (n+2)!$ unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$
Nicolae Ivășchescu, Canada

2. În interiorul triunghiului isoscel ABC în care $m(\angle A) = 20^\circ$ și $[AB] \equiv [AC]$, se construiește triunghiul echilateral BCD și fie CM bisectoarea unghiului ACD, $M \in (AB)$. Să se demonstreze că AMDC este trapez isoscel.
Eugeniu Blăjuț, Bacău

3. Numărul natural \overline{abcd} se numește atipic dacă $5 \cdot \overline{ab} = 3 \cdot \overline{cd}$.
a) Să se demonstreze că \overline{abcd} se divide cu 61.
b) Să se determine suma numerelor atipice.
Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești

4. Să se determine x, y, z numere naturale pentru care $2^x + 3^y + 5^z = 334$.
Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești

5. a) Să se dea exemplu de două numere naturale nenule a, b pentru care $17 | 5a + 2b$.
b) Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $17 | 5a + 2b$, atunci fracția $\frac{2a+11b}{5a+2b}$ se simplifică prin 17.
Valentina Soare, Ploiești

6. În exteriorul triunghiului echilateral ABC se construiește triunghiul isoscel BDC în care $m(\angle BDC) = 100^\circ$. Dacă BE și BF sunt trisectoarele unghiului ABC, $E, F \in (AC)$, A-E-F-C iar $\{O\} = BF \cap ED$, să se demonstreze că triunghiul BDO este echilateral.
Eugeniu Blăjuț, Bacău

7. Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte :
a) $5^{2n} + 4 \cdot 5^n + 4, n \in \mathbb{N}$; b) $36^n - 6^{n+1} + 9, n \in \mathbb{N}$; c) $8^{2n} + 8^{n+1} + 16, n \in \mathbb{N}$
Viorica Dina, Moreni

8. Aflați $x, y \in \mathbb{Z}$, știind că $xy + 13y + x = 2008$.
Gheorghe Achim, Mizil

9. Să se determine primele trei zecimale după virgulă ale lui $\sqrt{9n^2 + 2n}$ dacă $n \geq 56, n \in \mathbb{N}$.
Gheorghe Crăciun, Ploiești

10. Să se arate că picioarele perpendicularelor din punctul de intersecție a diagonalelor unui romb pe laturile rombului sunt vârfurile unui dreptunghi.

11. Fie numărul $a = \sqrt{10 - \sqrt{19}} - \sqrt{10 + \sqrt{19}}$
a) Arătați că $a^2 = -2$
b) Calculați $(a + \sqrt{2})^{2010} =$
Cornelia Sofronie, Ștefănești

Clasa a VIII-a

1. Rezolvați în R^* ecuația : $1 - \frac{4}{x^2} = \frac{3}{x} - \frac{12}{x^3}$

Nicolae Ivășchescu, Canada

2. Rezolvați în $N \times N$ ecuația : $6x^2 + 7xy - 3y^2 - 6 = 0$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

3. Dacă $a, b, c \in R$ și $a + b + c = 1$ arătați că $\sqrt{b^2 + c^2 + 6a + 2bc + 3}$ este număr rațional.

Nicolae Ivășchescu, Canada

4. Fie $A_n = \underbrace{11 \dots 1}_n$.

a) Să se demonstreze că 37 divide A_n dacă și numai dacă 3 divide n .

b) Să se demonstreze că 7 divide A_n dacă și numai dacă 6 divide n .

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești

5. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x-1}{2015} + \frac{x-2}{2014} + \frac{x-3}{2013} + \dots + \frac{x-1008}{1008} = \frac{x+2}{2018} + \frac{x+3}{2019} + \frac{x+4}{2020} + \dots + \frac{x+1009}{3025}$$

Valentina Soare, Ploiești

6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$|x - y + 1| = 4y + 2x - x^2 - y^2 - 5$$

Cătălina Isofache, Ploiești

7. Arătați că dacă $x \in [-3, 6]$, atunci $(\sqrt{x+12} + 6\sqrt{x+3} + \sqrt{x+12} - 6\sqrt{x+3} - 7)^{2016} = 1$

Oprea Dumitru, Dragodanesti, Dambovită

8. Pe planul rombului ABCD cu $AB = 6$ cm și $AC = 6\sqrt{3}$ cm, se ridică perpendiculara $BM = 6$ cm. Fie E mijlocul lui BM și F mijlocul lui DM. Aflați:

a) distanțele de la M la AC și DC;

b) măsura unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planele (EFA) și (ABC).

Ioan Tomescu și Ion Lupea, Ploiești

9. Fie punctele necoplanare A, B, C, D și G_1, G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv ABD.

a) Aflați $(AG_1C) \cap (AG_2D)$

b) Demonstrați că $G_1G_2 \parallel (BCD)$

c) Demonstrați că dreptele AB, CG_1, DG_2 sunt concurente

Bilciurescu Ion, Boldești-Scăeni

10. Se consideră un paralelipiped dreptunghic având suma muchiilor de $\sqrt{432}$ cm iar diagonala de 3 cm. Calculați volumul paralelipipedului.

Gheorghe Crăciun, Ploiești

