S. S. M. R.
Filiala Corabia

Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"
Corabia , Olt

Concursul interjudeţean de matematică "DANUBIUS" – 2016 *Corabia*, Ediţia a 10 - a .

Clasa a IX-a

Subiectul I.

Se consideră un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că, pentru orice $n\in$ **N***, are loc identitatea

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{n3^{n+2}-(n+1)3^{n+1}+3}{4}.$$

Să se arate că şirul $\left(\dfrac{a_n}{3^n}\right)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Subiectul II

a) Aflati $m,n\in\mathbb{N}$ astfel incat: $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{m-\sqrt{3}}=\sqrt{n}$
b) Aflati $p,q,r\in\mathbb{N}$ astfel incat: $\sqrt{2+\sqrt{p}}+\sqrt{2-\sqrt{q}}=\sqrt{r}$.

Prof. univ. dr. habil. **Cristinel Mortici**

Subiectul III.

În plan se consideră punctele $M,P_1,\ldots,P_{2016}$ cu proprietatea că $\overrightarrow{r_M}=a_1\overrightarrow{r_{P_1}}+\cdots+a_{2016}\overrightarrow{r_{P_{2016}}}$, unde $\overrightarrow{r_M},\overrightarrow{r_{P_1}},\ldots,\overrightarrow{r_{P_{2016}}}$ sunt vectorii de poziţie ale punctelor, cu polul O şi O' diferiţi şi scalarii reali $a_1,\ldots,a_{2016}$. Să se determine suma scalarilor .

student **Luigi-Ionuţ Catană**

Subiectul IV.

Fie $a, b, c > 0$.
Sa se demonstreze ca $\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}+\min\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}\geq 2$.

dr. **Dorin Mărghidanu** , Corabia

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.
Timp efectiv de lucru 3 ore.

S. S. M. R.
Filiala Corabia

Colegiul Naţional “ Al. I. Cuza”
Corabia , Olt

Concursul interjudeţean de matematică
“DANUBIUS” – 2016
Corabia, Ediţia a 10 - a .

<u>Clasa a IX-a</u> - <u>Barem de corectare</u> -

<u>Subiectul I.</u>

Se consideră un şir de numere reale $(a_n)_{n\ge1}$ cu proprietatea că, pentru orice $n\in$ **N***, are loc identitatea

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{n3^{n+2}-(n+1)3^{n+1}+3}{4}.$$

Să se arate că şirul $\left(\dfrac{a_n}{3^n}\right)_{n\ge1}$ este o progresie aritmetică.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

<u>Solutie</u> :

Se cunoaşte că, dacă, pentru un şir de numere reale $(a_n)_n$, se notează cu S_n suma parţială de ordinul n, adică

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n,$$

atunci are loc formula

$$a_n=S_n-S_{n-1} \qquad (n\ge2).$$

Aplicând-o şirului dat, se obţine, după câteva calcule,

$$a_n=n3^n,$$

de unde concluzia

<u>Subiectul II</u>

a)Aflati $m,n\in\mathbb{N}$ astfel incat: $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{m-\sqrt{3}}=\sqrt{n}$
b)Aflati $p,q,r\in\mathbb{N}$ astfel incat: $\sqrt{2+\sqrt{p}}+\sqrt{2-\sqrt{q}}=\sqrt{r}.$

Prof. univ. dr. habil. **Cristinel Mortici**

<u>Solutie</u> :

a)

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{m-\sqrt{3}}\right)^2=m+2\sqrt{\sqrt{3}+2}\sqrt{m-\sqrt{3}}+2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{3}+2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\frac{\sqrt{m-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{m-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\in Q\Rightarrow m=2,\text{ apoi } n=6.$$

b) $q\le4$, pentru ca sa aiba sens $\sqrt{2-\sqrt{q}}$, apoi prin incercari.

Subiectul III.

În plan se consideră punctele $M, P_1, \ldots, P_{2016}$ cu proprietatea că $\overrightarrow{r_M} = a_1\overrightarrow{r_{P_1}} + \cdots + a_{2016}\overrightarrow{r_{P_{2016}}}$, unde $\overrightarrow{r_M}, \overrightarrow{r_{P_1}}, \ldots, \overrightarrow{r_{P_{2016}}}$ sunt vectorii de poziţie ale punctelor, cu polul O şi O' diferiţi şi scalarii reali $a_1, \ldots, a_{2016}$. Să se determine suma scalarilor.

student **Luigi-Ionuţ Catană**

Solutie:

Avem $\overrightarrow{OM} = a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_{2016}\overrightarrow{OP_{2016}}$. Să schimbăm polul în $O' \neq O$. Evident relaţia vectorilor de poziţie rămâne aceeaşi, deci $\overrightarrow{O'M} = a_1\overrightarrow{O'P_1} + \cdots + a_{2016}\overrightarrow{O'P_{2016}}$. Dar
$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'O} + a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_{2016}\overrightarrow{OP_{2016}}$.
Deci $a_1\overrightarrow{O'P_1} + \cdots + a_{2016}\overrightarrow{O'P_{2016}} = \overrightarrow{O'O} + a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_{2016}\overrightarrow{OP_{2016}}$, de unde
$\left(\sum_{k=1}^{2016} a_k - 1\right)\overrightarrow{O'O} = \vec{0}$, de unde $\sum_{k=1}^{2016} a_k = 1$.

Subiectul IV.

Fie $\boldsymbol{a, b, c > 0}$.
Sa se demonstreze ca $\boldsymbol{max}\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right\} + \boldsymbol{min}\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right\} \geq \mathbf{2}$.

dr. ***Dorin Mărghidanu***, Corabia

Solutie

Fie: $M = max\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right\}$, $m = min\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right\}$, $\mathbf{P} = M \times m$, $S = M + m$

Vom demonstra mai intai ca $P \geq 1$. **(1)**

Datorita circularitatii lui P, putem presupune ca $a \leq b \leq c$. **(2)**

Cum $\frac{a}{b} \leq 1$, $\frac{b}{c} \leq 1$ si $\frac{c}{a} \geq 1$ $=> M = \frac{c}{a}$

Minimul m poate fi $\frac{a}{b}$ sau $\frac{b}{c}$

Daca m = $\frac{a}{b}$ => **P** = $M \times m = \frac{c}{a} \times \frac{a}{b} = \frac{c}{b} \geq 1$

Daca **m**=$\frac{b}{c}$ => $P = M \times m = \frac{c}{a} \times \frac{b}{c} = \frac{b}{a} \geq \mathbf{1}$ .Deci are loc (1) .

Restul reiese din inegalitatea : **S = M + n** $\geq 2\sqrt{M \times m} = 2\sqrt{p} \geq \mathbf{2}$.