S. S. M. R.
Filiala Corabia

Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"
Corabia , Olt

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2016
Corabia, Ediţia a 10-a

Clasa a X-a

Subiectul I.

Să se determine numerele reale sau complexe z cu proprietatea că există o constantă a reală sau complexă astfel încât

$$z^n + \frac{1}{z^n} = a$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine apoi a .

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Subiectul II

Determinati numerele reale x , astfel incat $\log_{x+1} x \geq \log_{x^2+1} x^2 \geq \log_{x^{2016}+1} x^{2016}$,

Prof. **Tutescu Lucian** , Craiova
Prof. **Tomescu Nicolae** , Corabia

Subiectul III.

a) Să se arate că $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \in \mathbb{R}$, $\forall z \in C^*$.

b) Să se arate că funcția $f: C^* \longrightarrow [-2,2]$ definită prin $f(z) = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$, $\forall z \in C^*$ este surjectivă .

Prof.dr, **Ovidiu Pop ,** Satu Mare

Subiectul IV.

. *Fie* $\boldsymbol{a}$ *,* $\boldsymbol{b}$ *,* $\boldsymbol{c}$ *numere reale pozitive astfel incat* $\boldsymbol{ab + bc + ca = 3}$

Sa se demonstreze inegalitatea $\boldsymbol{\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} \leq 1}$.

Profesori: **Leonard Giugiuc** , **Dan Sitaru** , Drobeta Tr. Severin

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.
Timp efectiv de lucru 3 ore.

S. S. M. R. **Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"**
Filiala Corabia **Corabia , Olt**

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2016
Corabia, Ediţia a 10-a

- Barem de corectare - Clasa a X-a

Subiectul I.

Să se determine numerele reale sau complexe z cu proprietatea că există o constantă a, reală sau complexă astfel încât

$$z^n + \frac{1}{z^n} = a$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine apoi a.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Solutie :

Din ipoteză rezultă, în particular, pentru $n = 1$ şi $n = 2$,

$$z + \frac{1}{z} = z^2 + \frac{1}{z^2}, \quad \text{relaţie care este echivalentă cu}$$

$$(z-1)^2(z^2+z+1) = 0.$$

Soluţia $z = 1$ convine şi dă $a = 2$.

Dacă $z^2 + z + 1 = 0$, atunci, prin împărţire cu z (având $z \neq 0$) se obţine

$$z + \frac{1}{z} = -1,$$

din care, prin ridicare la pătrat, rezultă

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = -1,$$

dar, având în vedere că, în acest caz, $z^3 = 1$, rezultă

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = 2,$$

deci nu se mai obţine aceiaşi valoare ca pentru suma patratelor. Aşadar cazul $z^2 + z + 1 = 0$ nu convine problemei.

În concluzie, $z = 1$ şi $a = 2$.

Subiectul II

Determinati numerele reale x, astfel incat $\log_{x+1} x \geq \log_{x^2+1} x^2 \geq \log_{x^{2016}+1} x^{2016}$,

Prof. **Tutescu Lucian** , Craiova , Prof. **Tomescu Nicolae** , Corabia

Solutie :

Din conditiile de existenta gasim $x > 0$. **(1p)**

Din $\log_{x+1} x \geq \log_{x^2+1} x^2$ obtinem $\frac{\ln x}{\ln(x+1)} - 2\frac{\ln x}{\ln(x^2+1)} \geq 0$. Cum $\ln(x+1) > 0$ si $\ln(x^2+1) > 0$ $\Longrightarrow \ln x\,(\ln(x^2+1) - 2\ln(x+1)) \geq 0$ si deoarece $\ln(x^2+1) < \ln(x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+1 < (x+1)^2 \Longrightarrow \ln x \leq 0$ adica $x \in (0,1]$. **(4p)**

Vom arata in continuare pentru $x \in (0,1]$ este verificata si

$\log_{x^2+1} x^2 \geq \log_{x^{2016}+1} x^{2016} \Leftrightarrow \frac{\ln x^2}{\ln(x^2+1)} \geq \frac{\ln x^{2016}}{\ln(x^{2016}+1)}$ sau $\begin{cases} \ln(x^2+1) > 0 \\ \ln(x^{2016}+1) > 0 \end{cases}$

$2\ln x \ln(x^{2016}+1) - 2016\ln(x^2+1)\ln x \geq 0$ adica, $2\ln x[\ln(x^{2016}+1) - \ln(x^2+1)^{1008}] \geq 0.$

Cum $\ln x \leq 0$ si $x^{2016}+1 < (x^2+1)^{1008}$, din binomul lui Newton , cu $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$, obtinem cerinta . Asadar , $x \in (0,1]$.

Subiectul III.

a) Să se arate că $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \in \mathbb{R}$, $\forall z \in C^*$

b) Să se arate că funcția $f: C^* \longrightarrow [-2,2]$ definită prin $f(z) = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$, $\forall z \in C^*$este surjectivă.

Prof.dr, **Ovidiu Pop**

Soluţie:

a) Fie $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| > 0$. Avem $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = \frac{z^2+\bar{z}^2}{|z|^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$,

deci $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \in \mathbb{R}$

b) Dacă $a = 2$, atunci $f(1) = 2$.

Dacă $a \in [-2,2)$, considerăm $z_a = \sqrt{\frac{2+a}{2-a}} + i$ (se verifică imediat că $\frac{2+a}{2-a} \geq 0$).

Atunci $f(z_a) = \frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = a$, unde $x = \sqrt{\frac{2+a}{2-a}}$ și $y = 1$.

Din cele de mai sus , rezultă că funcția f este surjectivă.

Subiectul IV.

Fie $\boldsymbol{a}$ *,* $\boldsymbol{b}$ *,* $\boldsymbol{c}$ *numere reale pozitive astfel incat* $\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{ca} = \mathbf{3}$

Sa se demonstreze inegalitatea $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}^2 + \mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}^2 + \mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c}^2 + \mathbf{2}} \leq \mathbf{1}$.

Profesori: **Leonard Giugiuc** , **Dan Sitaru** , Drobeta Tr. Severin

Solutie :

Inegalitatea este echivalenta cu

$$12 + 4(a^2 + b^2 + c^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$
$$\leq 8 + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + a^2b^2c^2 \leftrightarrow$$
$$4 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2c^2 .$$

Notam $bc = x$ *,* $ca = y$ *and* $ab = z$ *.Atunci* $x, y, z > 0$ *,* $x + y + z = 3$ *si* $a^2b^2c^2 = xyz$ *.Deci trebuie sa demonstram ca ,* $x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 4$.

Prin omogenizare ultima inegalitate este echivalenta cu

$$4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \leq (x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + xyz \leftrightarrow$$
$$4S_3 + 12s + 24xyz \leq 9S_3 + 9s + 27xyz \leftrightarrow$$
$$5S_3 - 3s + 3xyz \geq 0 \text{ ,unde } S_3 = x^3 + y^3 + z^3 \text{ si } s = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) .$$

Dar cu inegalitatea lui Schur , $S_3 - s + 3xyz \geq 0$ *si binecunoscutele inegalitati ,*

$x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$ *,* $y^3 + z^3 \geq yz(y+z)$ *si* $z^3 + x^3 \geq zx(z+x)$ *,obtinem* $4S_3 - 2s \geq 0$.