S. S. M. R.
Filiala Corabia

Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"
Corabia , Olt

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2016
Corabia, Ediţia a 10-a

Clasa a XI-a

Subiectul I.

Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{ax}\cos bx$

a) Să se calculeze $f'(x), f''(x)$ şi $f'''(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine $f'''(x)$ în cazul în care $a=-\frac{1}{2}$ şi $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) În cazul de la punctul b), să se determine $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(3k)}(0)}{k(k+1)}$.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Subiectul II

Să se determine $X\in M_2(C)$ ştiind că $X^2+2X=\begin{pmatrix}3 & 12\\ 0 & 15\end{pmatrix}$.

dr. **Ovidiu Pop**, Satu Mare

Subiectul III.

Pentru $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}>0$, fie $\boldsymbol{E(a,b)=\frac{2a+3b}{4a+5b}+\frac{2b+3a}{4b+5a}}$.

Să se demonstreze că $\{E(a,b)\mid a,b>0\}\subset\left(\frac{11}{10},\frac{10}{9}\right]$ si că $\frac{11}{10}$ şi $\frac{10}{9}$ sunt cele mai bune constante cu aceasta proprietate (adică intervalul $\left(\frac{11}{10},\frac{10}{9}\right]$ este cel mai mic posibil) .

dr. ***Dorin Mărghidanu***

Subiectul IV.

Fie $A,B,C,D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,cu A inversabilă. Demonstraţi că dacă
$A(C-A^{-1})+BD=i(BC-AD)$ atunci $(C-A^{-1})A+DB=i(CB-DA)$.

student **Luigi-Ionuţ Catană**

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.
Timp efectiv de lucru 3 ore.

S. S. M. R. — **Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"**
Filiala Corabia — **Corabia , Olt**

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2016
Corabia, Ediţia a 10-a

Clasa a XI-a - Barem de corectare –

Subiectul I.

Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{ax}\cos bx$

a) Să se calculeze $f'(x)$, $f''(x)$ şi $f'''(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine $f'''(x)$ în cazul în care $a=-\dfrac{1}{2}$ şi $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) În cazul de la punctul b), să se determine $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(3k)}(0)}{k(k+1)}$.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Solutie :

a) Efectuând calculele după regulile uzuale de derivare, se obţine succesiv:

$$f'(x)=ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx$$

$$f''(x)=(a^2-b^2)e^{ax}\cos bx-2abe^{ax}\sin bx$$

$$f'''(x)=(a^3-3a^2b)e^{ax}\cos bx-(3a^2b-b^3)e^{ax}\sin bx.$$

b) Înlocuind în expresia derivatei de ordinul trei valorile indicate ale lui a şi b, se obţine

$$f'''(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2},$$

adică

$$f'''(x)=f(x).$$

deci derivatele "se repetă" din trei în trei.

c) Se obţine $f^{(3k)}(0)=1$, deci limita cerută este

$$l=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Subiectul II

Să se determine $X\in M_2(C)$ ştiind că $X^2+2X=\begin{pmatrix}3 & 12\\ 0 & 15\end{pmatrix}$.

dr. **Ovidiu Pop**, Satu Mare

Solutie: $X\in M_2(C)\Rightarrow\exists\,\mathrm{a,b,c,d}\in\mathrm{C}:\mathrm{X}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

$$X^2+2X=\begin{pmatrix}3 & 12\\ 0 & 15\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\mathrm{a}^2+bc+2a & b(a+d+2)\\ c(a+d+2) & bc+d^2+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 12\\ 0 & 15\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2+bc+2a=3 \\ b(a+d+2)=12 \\ c(a+d+2)=0 \\ bc+d^2+2d=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{c}=0 \\ \mathrm{a}^2+2a-3=0 \\ d^2+2d-15=0 \\ b(a+d+2)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{c}=0 \\ \mathrm{a}\in\{-3,1\} \\ d\in\{-5,3\} \\ b(a+d+2)=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-3 \\ d=-5 \\ c=0 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{X}=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} a=-3 \\ d=3 \\ c=0 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{X}=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} a=1 \\ d=-5 \\ c=0 \\ b=-6 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{X}=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} a=1 \\ d=3 \\ c=0 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{X}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Subiectul III.

Pentru $a\,,b>0$, fie $E(a,b)=\dfrac{2a+3b}{4a+5b}+\dfrac{2b+3a}{4b+5a}$.

Să se demonstreze că $\{E(a,b)\mid a\,,b>0\}\subset\left(\dfrac{11}{10},\dfrac{10}{9}\right]$ si că $\dfrac{11}{10}$ şi $\dfrac{10}{9}$ sunt cele mai bune constante cu aceasta proprietate (adică intervalul $\left(\dfrac{11}{10},\dfrac{10}{9}\right]$ este cel mai mic posibil) .

dr. ***Dorin Mărghidanu***

Soluţie

Obsevăm că , pentru $a\,,b>0$, cu notaţia $x:=\dfrac{a}{b}>0$, avem :

$$E(a,b)=\frac{2a+3b}{4a+5b}+\frac{2b+3a}{4b+5a}=\frac{2\frac{a}{b}+3}{4\frac{a}{b}+5}+\frac{2+3\frac{a}{b}}{4+5\frac{a}{b}}=\frac{2x+3}{4x+5}+\frac{2+3x}{4+5x}.$$

Pentru funcţia . $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x+5}+\dfrac{2+3x}{4+5x}$, avem :

$f'(x)=\dfrac{-18(x^2-1)}{(4x+5)^2(4+5x)^2}$, iar $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Deci $x=1$ este abscisa punctului de maxim , maxim atins în $f(1)=\dfrac{5}{9}+\dfrac{5}{9}=\dfrac{10}{9}$.

Functia f este crescătoare pe $(0,1)$ şi descrescătoare pe $(1,\infty)$. Cum $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{4}=\dfrac{11}{10}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{11}{10}$, infinimul funcţiei f este $\dfrac{11}{10}$.

Din f continuă , şi cu *proprietatea lui Darboux* , rezultă că funcţia f ia toate valorile dintre $\dfrac{11}{10}$ si $\dfrac{10}{9}$. Maximul funcţiei (şi implicit al expresiei $E(a,b)$) este obţinut când $x=1$, deci când $a=b$.

Infimumul funcţiei (şi implicit al expresiei $E(a,b)$) se obţine când :
$x\to+0$ (adica $a\to+0$, sau $b\to\infty$) , sau $x\to\infty$ (deci când $a\to\infty$, sau $b\to+0$).

<u>Subiectul IV.</u>

Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,cu A inversabilă. Demonstraţi că dacă $A(C - A^{-1}) + BD = i(BC - AD)$ atunci $(C - A^{-1})A + DB = i(CB - DA)$.

student **Luigi-Ionuţ Catană**

Soluţie:

$A(C - A^{-1}) + BD = i(BC - AD) \Longrightarrow AC - AA^{-1} + BD - iBC + iAD = O_n$
$\Longrightarrow (A - iB)C + i(A - iB)D = I_n \Longrightarrow (A - iB)(C + iD) = I_n$
$\Longrightarrow A - iB = (C + iD)^{-1} \Longrightarrow (C + iD)(A - iB) = I_n$
$\Longrightarrow CA - iCB + iDA + DB = I_n \Longrightarrow CA - A^{-1}A + DB = i(CB - BA)$
$\Longrightarrow (C - A^{-1})A + DB = i(CB - DA).$