S. S. M. R.
Filiala Corabia

Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"
Corabia , Olt

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2016
Corabia, Ediţia a 10-a

Clasa a XII-a

Subiectul I.

Se consideră funcţia $f:[0,\pi/4]\to[0,\ln 2]$ definită de egalitatea $f(x)=\ln(1+\operatorname{tg} x)$.

a) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

b) Ştiind că $\int_0^{\pi/4}\ln(1+\mathbf{tg}\,x)dx=\frac{\pi}{8}\ln 2$, să se calculeze $\int_0^{\ln 2}\mathbf{arctg}(e^y-1)dy$.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Subiectul II

Fie inelul $(A,+,\cdot), A'\subset A$, astfel încât $(A',+,\cdot)$ este inel, 0 este zeroul inelului $(A,\ +,\ \cdot)$, iar 1, $1'$ sunt unitățile inelului $(A,\ +,\ \cdot)$, respectiv $(A',\ +,\ \cdot)$, $0\neq 1'$, $1\neq 1'$. Să se arate că:

a) $0\in A'$ și $1\notin A'$;

b) $\forall x\in A\setminus A', \forall y\in A'\setminus\{0\}\Longrightarrow x+y\in A\setminus A'$;

c) $\forall x\in A'\setminus\{0\}$, x este divizor al lui zero în inelul $(A,+,\ \cdot)$.

Dați un exemplu de inele care verifică ipoteza problemei.

prof.dr. **Ovidiu Pop** , Satu Mare

Subiectul III.

Fie t *un numar real* , $t\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ *si* $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to[0,\infty)$ *o functie continua descrescatoare .*

Sa se demonstreze inegalitatea , $\int_0^t f(x)\cos x\,dx\geq\int_0^t f(x)\sin x\,dx$.

Profesori: ***Leonard Giugiuc*** , ***Diana Trailescu*** , Tr. Severin

Subiectul IV.

. Fie numerele reale ***a*** , ***b*** , ***c*** astfel încât $a+b+c=1$ și $ab+bc+ca=abc$.

Să se calculeze valoarea expresiei $E=\frac{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}{a^{2017}+b^{2017}+c^{2017}}$.

dr. Dorin Mărghidanu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.
Timp efectiv de lucru 3 ore.

S. S. M. R.
Filiala Corabia

Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"
Corabia , Olt

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2016
Corabia, Ediţia a 10-*a*

- Barem de corectare -

Clasa a XII-a

Subiectul I.

Se consideră funcţia $f:[0,\pi/4]\to[0,\ln 2]$ definită de egalitatea $f(x)=\ln(1+\operatorname{tg} x)$.

a) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

b) Ştiind că $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\ln(1+\mathbf{tg}\,x)dx=\frac{\pi}{8}\ln 2$, să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\mathbf{arctg}\,(e^y-1)dy$.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Solutie

a) Funcţia f este derivabilă şi are derivata strict pozitivă, deci este strict crescătoare, deci injectivă. Funcţia este continuă, deci transformă intervalul $[0,\pi/2]$ tot într-un interval $[\alpha,\beta]$, în care, funcţia fiind crescătoare, avem $\alpha=f(0)$ şi $\beta=f(\pi/4)$. Prin urmare, $f([0,\pi/4])=[0,\ln 2]$. Aşadar, funcţia este bijectivă.

b) Funcţia f fiind bijectivă, este inversabilă. Se obţine $f^{-1}(y)=\operatorname{arctg}(e^y-1)$. Prin urmare, integrala cerută este $\displaystyle\int_0^{\ln 2}f^{-1}(y)dy$.

Să notăm cu A prima integrală, iar cu B pe cea de a doua (cea cerută). Calculăm integrala B efectuând substituţia $y=f(x)$. Se obţine

$$B=\int_0^{\pi/4}f^{-1}(f(x))f'(x)dx,\quad \text{adică}\quad B=\int_0^{\pi/4}xf'(x)dx.$$

O integrare prin părţi conduce la egalitatea

$$B=xf(x)\Big|_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/2}f(x)dx=\frac{\pi}{4}\ln 2-A,$$ deci, înlocuind valoarea lui A, se obţine $B=\dfrac{\pi}{8}\ln 2.$

Subiectul II

Fie inelul $(A,+,\cdot), A'\subset A$, astfel încât $(A',+,\cdot)$ este inel, 0 este zeroul inelului $(A,\ +,\ \cdot)$, iar 1, $1'$ sunt unitățile inelului $(A,\ +,\ \cdot)$, respectiv $(A',\ +,\ \cdot)$, $0\neq 1'$, $1\neq 1'$. Să se arate că:

a) $0\in A'$ și $1\notin A'$;

b) $\forall x\in A\setminus A', \forall y\in A'\setminus\{0\}\Longrightarrow x+y\in A\setminus A'$;

c) $\forall x\in A'\setminus\{0\}$, x este divizor al lui zero în inelul $(A,+,\ \cdot)$.

Dați un exemplu de inele care verifică ipoteza problemei.

prof.dr. **Ovidiu Pop** , Satu Mare

Soluție:

a) Fie $0'$ zeroul inelului $(A', +, \cdot)$ și $x \in A' \Longrightarrow 0' + x = x$. Dar $A' \subset A \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow 0 + x = x$ și atunci $0' + x = 0 + x$. Conform teroremei de simplificare în $(A', +, \cdot) \Longrightarrow 0' = 0$, dar $0' \in A \Longrightarrow 0 \in A'$.

Presupunem prin absurd că $1 \in A'$. Atunci $1 \cdot 1' = 1$ în $(A', +, \cdot)$ și $1 \cdot 1' = 1'$ în $(A, +, \cdot) \Longrightarrow 1 = 1'$, ceea ce este o contradicție.

b) Presupunem prin absurd că $x + y \in A'$. Deoarece $y \in A' \Longrightarrow -y \in A'$ și atunci în grupul $(A', +)$ avem că

$(x + y) + (-y) \in A' \Leftrightarrow x + \big(y + (-y)\big) \in A' \Leftrightarrow x + 0 \in A' \Leftrightarrow x \in A'$, ceea ce este o contradicție.

c) Fie $x \in A' \setminus \{0\}$. Conform lui b) $\Longrightarrow 1 - 1' \in A \setminus A'$, iar din ipoteză rezultă că $1 - 1' \neq 0$. Avem $x \cdot (1 - 1') = x \cdot 1 - x \cdot 1' = x - x = 0$, adică x este divizor al lui zero în inelul $(A, +, \cdot)$.Exemplu:

$A = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $(A, +, \cdot)$ inel $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A' = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{C} \right\}$ $(A', +, \cdot)$ inel, $i_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Subiectul III.

Fie t *un numar real* , $t \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ *si* $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, \infty)$ *o functie continua descrescatoare* .

Sa se demonstreze inegalitatea , $\displaystyle\int_0^t f(x) \cos x \, dx \geq \int_0^t f(x) \sin x \, dx$.

Profesori: ***Leonard Giugiuc*** , ***Diana Trailescu***, Tr. Severin

Solutie:

Functiile f *si* $\cos x - \sin x$ *sunt continue si descrecatoare pe* $[0, t]$ *, deci,*

folosind ***inegalitatea Cebisev*** , $\displaystyle\int_0^t f(x)(\cos x - \sin x)\, dx$

$$\geq \frac{1}{t}\left(\int_0^t f(x)\, dx\right)\left(\int_0^t (\cos x - \sin x)\, dx\right).$$

Dar $\displaystyle\int_0^t f(x)\, dx \geq 0$ *si* $\displaystyle\int_0^t (\cos x - \sin x)\, dx = \cos t + \sin t - 1$; *cum* $\frac{\pi}{4} < t \leq \frac{\pi}{2}$,

atunci avem

$\cos t + \sin t \geq \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_0^t (\cos x - \sin x)\, dx \geq 0$. *De aici* ,

$$\int_0^t f(x)(\cos x - \sin x)\, dx \geq 0 \Longrightarrow \int_0^t f(x) \cos x \, dx \geq \int_0^t f(x) \sin x \, dx .$$

Subiectul IV.

Fie numerele reale ***a*** **,** ***b*** **,** ***c*** astfel încât $a+b+c=1$ și $ab+bc+ca=abc$.
Să se calculeze valoarea expresiei $E=\frac{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}{a^{2017}+b^{2017}+c^{2017}}$.

dr. Dorin Mărghidanu

Solutie:

Cu *relațiile lui Viète,* a, b, c sunt rădăcinile ecuației de gradul **III** :

$$x^3-x^2+kx-k=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+k)=0.$$

O rădăcină a acestei ecuații este $x=1$.Fie $a=1$ această rădăcină . Atunci cu relatia de conditie $a+b+c=1 \Longrightarrow\Rightarrow b+c=0 \Rightarrow b=-c$
(Aceeași relație rezultă și din a doua relație de condiție). Atunci,

$$E=\frac{1^{2015}+b^{2015}-b^{2015}}{1^{2017}+b^{2017}+b^{2017}}=1.$$

Același rezultat dacă $b=1$ sau $c=1$.(-datorită simetriei lui ***E*** în variabilele a, b, c).
Dacă $x^2+k=0$, acesta are rădăcini reale dacă $k<0$, anume $x_{1,2}=\pm\sqrt{-k}$.
Dacă acestea sunt rădăcinile ***b*** și ***c*** din următoarele obținem $b+c=0$ și $a=1$,
– deci ca mai sus. În concluzie , $E=1$.