CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediţia a IV-a, Năsăud, 6-8 mai 2016

Enunţuri şi barem, clasa a V-a

1. *Sunt scrise la rând 2016 de cifre. Oricare două cifre vecine formează un număr care se descompune ca produs de trei numere prime distincte.*
   Să se afle cifra situată pe poziţia 1008.

Soluţie:

Cifrele prime sunt 2,3,5 şi 7 $\Rightarrow 30 = 2\cdot 3\cdot 5;\ 42 = 2\cdot 3\cdot 7; 70 = 2\cdot 5\cdot 7;\ (3\cdot 5\cdot 7 = 105)$ 2p

Putem avea ca factor prim şi un număr de 2 cifre $\Rightarrow 66 = 2\cdot 3\cdot 11;\ 78 = 2\cdot 3\cdot 13$ 1p

Orice alt produs de factori primi va fi un număr de cel puţin 3 cifre 1p

Pentru ca numărul format de oricare 2 cifre vecine să aibă proprietatea din enunţ, trebuie ca ultima lui cifră a primului număr de 2 cifre să fie prima cifră a următorului ş.a.m.d. => 1p

singura variantă posibilă e ca toate numerele de 2 cifre să fie 66 => 1p

pe poziţia 1008 se află cifra 6. 1p

2. *Un număr $\overline{abc}$ se numeşte n-norocos dacă a+b+c=n şi $\overline{abc} \vdots n$.*
   Fie $B = \{n \in \boldsymbol{N} | există\ un\ număr\ n - norocos\}$.
   Arătaţi că mulţimea B are cel puţin 20 de elemente.

Soluţie:

Pentru n număr de o cifră, $\overline{n00} \vdots n \ \Rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \subset B$ 2p

Pentru $\mathrm{n} = 2\mathrm{p},\ p \in \{5,6,7,8,9\},\ \overline{\mathrm{pp0}} \vdots \mathrm{n} \ \Rightarrow \{10,12,14,16,18\} \subset \mathrm{B}$ 2p

Pentru $\mathrm{n} = 3\mathrm{p},\ p \in \{5,7,8,9\},\ \overline{\mathrm{ppp}} \vdots \mathrm{n} \ \Rightarrow \{15,21,24,27\} \subset \mathrm{B}$ 1p

$605 \vdots 11 \Rightarrow 11 \in \mathrm{B}$ 1p

Se găseşte unul din următoarele $247 \vdots 13, 476 \vdots 17$, sau $874 \vdots 19 \Rightarrow card(B) \geq 20$. 1p

3. *Aflaţi numerele $\overline{abcde}$ ştiind că $\overline{abcde} = \overline{ab}\cdot(a+b+c+d+e)^2$.*

G.M. 2/2016

Soluţie:

$\overline{ab}\cdot 1000 + \overline{cde} = \overline{ab}\cdot(a+b+c+d+e)^2 \Leftrightarrow$

$\overline{cde} = \overline{ab}\cdot[(a+b+c+d+e)^2 - 1000] \Rightarrow a+b+c+d+e \geq 32$ 1p

$Dacă\ a+b+c+d+e \geq 34 \Rightarrow \overline{cde} \geq 10\cdot(34^2 - 1000) \Rightarrow \overline{cde} \geq 1560(\text{fals}) \Rightarrow$

$a+b+c+d+e \in \{32,33\}$ 1p

Dacă $a+b+c+d+e = 33 \Rightarrow \overline{cde} = \overline{ab}\cdot 89 \Rightarrow \overline{ab} \in \{10,11\}$ care nu convin $\Rightarrow$ 1p

$a+b+c+d+e = 32$ și $\overline{cde} = \overline{ab}\cdot 24 \Rightarrow \overline{cde} = 240a + 24b \Rightarrow$

$99c + 9d + 32 = 243a + 27b - (2a+2b) \Rightarrow 2\mathrm{a} + 2\mathrm{b} - 4 \vdots 9 \Rightarrow$ 1p

$2(a+b-2) \vdots 9\ ;(2,9) = 1 \Rightarrow a+b-2 \vdots 9 \ \Rightarrow a+b \in \{2,11\} \Rightarrow$ 1p

Deoarece $50\cdot 24 = 1200 \Rightarrow a \leq 4 \Rightarrow a = 1, b = 1 \Rightarrow \overline{cde} = 264$ nu verifică

$a = 2, b = 9 \Rightarrow \overline{cde} = 29\cdot 24 = 696, 2+9+6+9+6 = 32 \Rightarrow 29696$ e soluție 1p

$a = 3, b = 8 \Rightarrow \overline{cde} = 38\cdot 24 = 912$ nu verifică

$a = 4, b = 7 \Rightarrow \overline{cde} = 47\cdot 24 = 1128$ fals 1p