CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediţia a IV-a, Năsăud, 6-8 mai 2016

Enunţuri şi barem, clasa a VI-a

1. *Determinaţi numerele naturale x, 2000 < x < 3000, care împărțite la 6, 7 și 11 dau resturile 3, 1, respectiv 4.*

G.M. 3/2016

Soluţie:

$$\left.\begin{array}{l} x = 6 \cdot c_1 + 3 \;\;|-15 \\ x = 7 \cdot c_2 + 1 \;\;|-15 \\ x = 11 \cdot c_3 + 4\,|-15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ 2p

$$\left.\begin{array}{r} x - 15 = 6 \cdot (c_1 - 2) \\ x - 15 = 7 \cdot (c_2 - 2) \\ x - 15 = 11 \cdot (c_3 - 1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ 1p

$$\left.\begin{array}{r} x - 15 \,\vdots\, 6 \\ x - 15 \,\vdots\, 7 \\ x - 15 \,\vdots\, 11 \end{array}\right\} \Rightarrow x - 15 \,\vdots\, [6,7,11] \Rightarrow$$ 1p

$x - 15 \,\vdots\, 462 \Rightarrow x - 15 = 462k \Rightarrow x = 462k + 15 \Rightarrow$ 1p

$2000 < 462k + 15 < 3000 \Rightarrow k \in \{5,6\} \Rightarrow x \in \{2325,2787\}$ 2p

2. *a) Găsiţi toate numerele naturale de 4 cifre, formate din cifre de 6 şi 8, care sunt divizibile cu 32;*
   b) Arătaţi că există un multiplu al lui 2016 format din cifre de 6 şi 8.

Soluţie:

a) $n \,\vdots\, 32 \Rightarrow n \,\vdots\, 4 \Rightarrow u_2(n) \in \{68,88\}$ 1p

$\Rightarrow n \in \{6668,6868,8668,8868,6688,6888,8688,8888\}$

Pentru $u_2(n) = 68 \Rightarrow n + 32 \in \{6700,6900,8700,8900\}$, nu sunt multiplii de 32, etc., sau se verifică direct, prin calcul, că singurul multiplu de 32 este 6688. 1p

b) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ 1p

Căutăm un multiplu de 32 care se scrie doar cu cifre de 6 şi 8. L-am găsit pe 6688.

Fie $a_1 = 6688$

$a_2 = 66886688$

……………..

$a_{64} = \underbrace{6688 \ldots 6688}_{256\ de\ cifre}$

Avem 64 de numere şi 63 de resturi posibile la împărţirea cu 63 ⇒(folosind principul cutiei) că există cel puţin 2 numere, ai şi aj, i>j, care dau acelaşi rest la împărţirea cu 63 1p

⇒ai-aj$\vdots$ 63 ⇔ $\underbrace{6688\ldots6688}_{4i\ cifre} - \underbrace{6688\ldots6688}_{4j\ cifre} \vdots 63 \Leftrightarrow \underbrace{6688\ldots6688}_{4i-4j\ cifre}\underbrace{00\ldots0}_{4j\ cifre} \vdots 63$

⇒ $\underbrace{6688\ldots6688}_{4i-4j\ cifre} \cdot 10^{4j} \vdots 63$ (1) 1p

Dar $63 = 3^2 \cdot 7$ => $(10^{4j},63)=1$ (2)

Notăm $n = \underbrace{6688\ldots6688}_{4i-4j\ cifre}$

Din (1) şi (2), folosind lema lui Gauss => $n \vdots 63$ 1p

$n = \underbrace{6688\ldots6688}_{4i-4j\ cifre} = 6688 \cdot \underbrace{10001000\ldots10001}_{i-j\ de\ 1} \vdots 32 \Rightarrow n \vdots [63,32] \Rightarrow n \vdots 2016.$ (q.e.d.) 1p

3. *Se consideră ΔABC isoscel,AB=AC, cu $m(\sphericalangle B) = 30^o$. Paralelele prin B şi C la AC, respectiv AB, se intersectează în punctul D, iar punctele $M \in (BD)$și $N \in (CD)$. Să se demonstreze că $(BM) \equiv (DN) \Leftrightarrow \Delta AMN\ este\ echilateral$.*

Soluţie:

$\Delta ABC\ isoscel\ (AB = AC) \Rightarrow m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle ABC) = 30^{\circ}$ 1p

$m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle BCD) = 30^{\circ}\ (alt.\ int.);\ analog\ m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle CBD) = 30^{\circ} \Rightarrow$

$m(\sphericalangle BCD) = m(\sphericalangle CBD) = 30^{\circ} \Rightarrow \Delta BDC$ isoscel ⇒ 1p

$BD = DC \Rightarrow AD$ mediatoarea lui $[BC] \Rightarrow AD$ bisectoare în ΔABC și ΔBDC ⇒

$m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle BDA) = 60^{\circ} \Rightarrow \Delta ABD$ echilateral $\Rightarrow AB = AD$ 1p

și $m(\sphericalangle ABM) = m(\sphericalangle ADN) = 60^{\circ}$

"⇒" $BM = DN \Rightarrow \Delta ABM \equiv \Delta ADN\ (L.U.L) \Rightarrow AM = AN$ 1p

Dar $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle DAN) \Rightarrow m(\sphericalangle MAN) = m(\sphericalangle BAD) = 60^{\circ} \Rightarrow$

ΔAMN isoscel cu un unghi de $60^{\circ} \Rightarrow \Delta AMN$ echilateral. 1p

"⇐" ΔAMN echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle MAN) = 60^{\circ} = m(\sphericalangle BAD) \Rightarrow m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle DAN)$ 1p

și $AM = AN; AB = AD \Rightarrow \Delta ABM \equiv \Delta ADN\ (L.U.L) \Rightarrow BM = DN.$ 1p