CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediţia a IV-a, BECLEAN, 6-8 mai 2016

Enunţuri şi barem, clasa a VII-a

1. Fie $x, y \in \boldsymbol{R}$, astfel încât $\sqrt{x^2-22x+130}+\sqrt{y^2+12y+45}=12$. Arătaţi că *x>y*.

Soluţie:

$\sqrt{x^2-22x+130}+\sqrt{y^2+12y+45}=12 \Leftrightarrow \sqrt{(x-11)^2+9}+\sqrt{(y+6)^2+9}=12$ 1p

Cum $\sqrt{(x-11)^2+9} \geq 3$ și $\sqrt{(y+6)^2+9} \geq 3 \Rightarrow$ 1p

$\sqrt{x^2-22x+130} \leq 12-3 \Leftrightarrow (x-11)^2+9 \leq 81 \Leftrightarrow (x-11)^2 \leq 72 \Rightarrow$ 1p

$-\sqrt{72} \leq \mathrm{x}-11 \leq \sqrt{72} \Leftrightarrow 11-6\sqrt{2} \leq \mathrm{x} \leq 11+6\sqrt{2}$ 1p

$\sqrt{(y+6)^2+9} \leq 12-3 \Leftrightarrow (y+6)^2+9 \leq 81 \Leftrightarrow (y+6)^2 \leq 72 \Rightarrow$ 1p

$-\sqrt{72} \leq \mathrm{y}+6 \leq \sqrt{72} \Leftrightarrow -6-6\sqrt{2} \leq \mathrm{y} \leq -6+6\sqrt{2}$ 1p

Dar $12\sqrt{2} < 17 \Rightarrow \mathrm{y} \leq -6+6\sqrt{2} < 11-6\sqrt{2} \leq \mathrm{x}$ (q.e.d.) 1p

2. *Să se determine toate numerele întregi x și y care verifică egalitatea*

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=y^2\ .$$

Soluţie:

Grupând termenii câte trei, membrul stâng se descompune în factori și ecuația devine $(x^2+x+1)(x^3+1)=y^2$.	1p
Avem $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$, *pentru orice număr real* x. Cum $y^2 \geq 0$ deducem că $x^3+1 \geq 0$, *deci* $x \geq -1$. Pentru $x=-1$ obținem $y=0$, iar pentru $x=0$ obținem $y^2=1$, *adică* $y=\pm 1$. Fie $x \geq 1$. Observăm că dacă (x, y) este o soluție, atunci și perechea (x,–y) este o soluție. Putem considera $y>0$. Atunci $y^2=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \geq 6$, deci $y \geq \sqrt{6}$. Cum y este un număr natural obținem $y \geq 3$.	1p
Lemă: *Pentru orice număr natural x numerele* x^2+x+1 *și* x^3+1 *sunt relativ prime.* Într-adevăr, presupunând contrariul, rezultă că există un număr prim p astfel încât	2p

$p\|x^2+x+1$ și $p\|x^3+1$. Cum $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ se divide cu numărul prim p, rezultă că $p\|x+1$ *sau* $p\|x^2-x+1$. Atunci $p\|(x^2+x+1)-(x+1)$ *sau* $p\|(x^2+x+1)-(x^2-x+1)$, adică $p\|x^2$ *sau* $p\|2x$. Rezultă că $p\|x$ *sau* $p\|2$. Dacă $p\|x$ obținem $p\|(x^2+x+1)-(x^2+x)$, *adică* $p\|1$, absurd! Dacă $p = 2$ obținem $p\|(x^2+x+1)=x(x+1)+1$, imposibil, deoarece numărul $x(x+1)$ este par.	
Dacă $y=p_1^{m_1}\ldots\ p_k^{m_k}$, este descompunerea în factori primi a lui y, atunci $(x^2+x+1)(x^3+1)=p_1^{2m_1}\ldots\ p_k^{2m_k}$. În virtutea lemei obținem că x^2+x+1 *și* x^3+1sunt pătrate perfecte. Fie $x^2+x+1=a^2$, unde a este un număr natural. Cum $x\geq 1$, deducem că $a\geq 2$. Deoarece ecuația de gradul al doilea $x^2+x+1-a^2=0$ are soluții întregi, trebuie ca $\Delta=1-4(1-a^2)$să fie pătrat perfect, adică $4a^2-3=b^2$, unde b este număr natural. Atunci $(2a-b)(2a+b)=3$ și cum a, b sunt numere naturale deducem că $2a-b=1$ *și* $2a+b=3$. Adunând cele două relații obținem $a=1$, imposibil! În concluzie, perechile *(x, y)* care verifică cerințele problemei sunt: (-1;0), (0;1), (0;-1)	3p

3. În triunghiul dreptunghic *ABC* cu $m(\sphericalangle BAC)=90^{\circ}$, bisectoarea [*CD* a unghiului ACB, $D\in AB$ intersectează perpendiculara în B pe BC în punctul E. Ştiind că *CE*^{2}=*8·AD·BD*, calculaţi unghiurile triunghiului ABC.

G.M. 12/2015

Soluţie:

$m(\sphericalangle BEC)=90^{\circ}-m(\sphericalangle BCD)=90^{\circ}-m(\sphericalangle ACD)=m(\sphericalangle ADC)=m(\sphericalangle BDE)\Rightarrow$
ΔBED isoscel $\Rightarrow BE=BD$ 1p

Fie $BM\perp CE\Rightarrow BM$ e înălțime și mediană în ΔBED isoscel $\Rightarrow EM=MD=\frac{ED}{2}$ 1p

$\Delta ADC\sim\Delta MDB\ (U.U.)\Rightarrow\frac{AD}{MD}=\frac{DC}{BD}\Rightarrow AD\cdot BD=\frac{ED}{2}\cdot DC\Rightarrow$ 1p

$CE^2=8\cdot\frac{ED}{2}\cdot DC=4\cdot ED\cdot DC\Rightarrow$ 1p

$(ED+DC)^2=4\cdot ED\cdot DC\Rightarrow ED^2+2\cdot ED\cdot DC+DC^2=4\cdot ED\cdot DC\Rightarrow$ 1p

$ED^2-2\cdot ED\cdot DC+DC^2=0\Rightarrow(ED-DC)^2=0\Rightarrow ED=DC\Rightarrow$ 1p

ΔBED echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle ABC)=30^{\circ}, m(\sphericalangle ACB)=60^{\circ}$. 1p