CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediţia a IV-a, BECLEAN, 6-8 mai 2016

Enunţuri şi barem, clasa a VIII-a

1. Se consideră mulţimea A={$a^2+b^2+1 \mid a,b \in N^*$}.
   a) Să se arate că mulţimea A conţine o infinitate de pătrate perfecte
   b) Dacă x, y, z sunt trei numere naturale pare, atunci $x^2+y^2+z^2 \notin A$
   c) Să se arate că, dacă x$\in$A, atunci x^2 poate fi scris ca sumă de trei pătrate perfecte nenule.

Soluţie:

a) Pentru a=$2k^2$ si b=2k $\Rightarrow$ $a^2+b^2+1=$$4k^4+4k^2+1$=$(2k^2+1)^2$, k$\in$N — 2p

b) Daca x=2k atunci $x^2=4k^2=M_4$ — 1p

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = M_4$, dar $a^2+b^2+1 \in$ {M_4+1; M_4+2; M_4+3} — 1p

c) $x^2=(a^2+b^2+1)^2=a^4+b^4+1+2a^2b^2+2a^2+2b^2=$ — 1p

$=a^4+b^4+1+2a^2b^2-2a^2-2b^2+4a^2+4b^2=$ — 1p

$=(a^2+b^2-1)^2+(2a)^2+(2b)^2$ — 1p

2. În cubul *ABCDA'B'C'D'* de muchie *a* se consideră punctele *M* şi *N* mijloacele muchiilor [*AB*], respectiv [*CC'*]. Dacă $\{P\}=DB\cap CM$ și $\{Q\}=BN\cap B'C$, calculaţi:
   a) distanţa de la punctul *A'* la dreapta de intersecţie a planelor *(BDQ)* şi *(AB'D)*
   b) măsura unghiului dintre dreptele *PQ* şi *A'D*.

G.M. 3/2016

Soluţie:

a) Notăm $A'B\cap AB'=\{O\}, BN\cap B'C'=\{T\}, D'C'\cap A'T=\{E\}$

(BDQ)=(BDT) şi *(AB'D)=(AB'TD)*$\Rightarrow$ $(BDQ)\cap(AB'D)=DT$ — 1p

$A'E=\frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A'T=a\sqrt{5}; A'D=a\sqrt{2}$ — 1p

În $\Delta C'DT$ dreptunghic în $C' \overset{T.Pit.}{\Longrightarrow} DT=a\sqrt{3}$ — 1p

$A'T^2 = DT^2 + A'D^2 \xRightarrow{R.T.Pit.} \Delta A'DT$ dreptunghic în $D \Rightarrow d(A', DT) = A'D = a\sqrt{2}$. 1p

b) $A'D \parallel B'C \Rightarrow m(\sphericalangle(A'D, PQ)) = m(\sphericalangle(B'C, PQ)) = m(\sphericalangle B'QP)$ 1p

$MC = \frac{a\sqrt{5}}{2}; PC = \frac{2}{3}MC = \frac{a\sqrt{5}}{3}; PB = \frac{1}{3}DB = \frac{a\sqrt{2}}{3}; PB'^2 = a^2 + \frac{2a^2}{9} = \frac{11a^2}{9}$

În $\Delta PB'C \xRightarrow{T.Stewart} PQ^2 \cdot B'C = PB'^2 \cdot QC + PC^2 \cdot B'Q - B'Q \cdot QC \cdot B'C \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ^2 = \frac{1}{3}PB'^2 + \frac{2}{3}PC^2 - \frac{2}{9}B'C^2 = \frac{1}{3}a^2$ 1p

Dar $PQ^2 + B'Q^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{8a^2}{9} = \frac{11a^2}{9} = PB'^2 \xRightarrow{R.T.Pit.} m(\sphericalangle B'QP) = 90^\circ$. 1p

3. *Să se determine toate numerele întregi n pentru care numărul*

$$N = (n^2 - n + 1)(n^2 + 3n + 1)$$

este pătrat perfect.

Soluţie. Avem

$$N = (n^2 - n + 1)(n^2 + 3n + 1) = [(n-1)^2 + n][(n+1)^2 + n] =$$

$$(n^2 - 1)^2 + 2(n^2 + 1)n + n^2 = (n^2 - 1)^2 + 2(n^2 - 1 + 2)n + n^2 =$$

$$= (n^2 - 1)^2 + 2(n^2 - 1)n + n^2 + 4n = (n^2 + n - 1)^2 + 4n.$$

2p

Pentru $n = 0$ avem $N = 1$. Vom arăta că pentru $n \neq 0$ numărul N nu este pătrat perfect.

Pentru $n = 1$ avem $N = 5$, care nu este patrat perfect. Dacă $n \geq 2$ avem inegalitatile

$$(n^2 + n - 1)^2 < (n^2 + n - 1)^2 + 4n < (n^2 + n - 1 + 1)^2.$$

Inegalitatea din stânga este evidentă. Inegalitatea din dreapta este echivalentă cu $4n < 2(n^2 + n - 1) + 1$, adică $2n^2 - 2n - 1 > 0$, adevă rată pentru orice număr natural $n \geq 2$. Prin urmare numărul N nu poate fi pătrat perfect pentru orice $n \geq 1$.

2p

Pentru $n \leq -1$ procedăm astfel. Verificăm prin calcul direct că pentru $n = -1, -2, -3$, numărul N nu este pătrat perfect. Dacă $n \leq -4$ avem inegalităţiile

$$(n^2 + n - 1 - 1)^2 < (n^2 + n - 1)^2 + 4n < (n^2 + n - 1)^2.$$

2p

Inegalitatea din partea dreaptă este evidentă. Inegalitatea din stânga este echivalentă cu $-2(n^2 + n - 1) + 1 < 4n$, adică $2n^2 + 6n - 3 > 0$, adevărată pentru orice număr întreg $n \leq -4$. Deci N nu este pătrat perfect pentru orice $n \leq -1$.

În concluzie, singura soluţie este $n = 0$.

1p