



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș și Sovata, 20 aprilie 2016
CLASA a 12-a

Soluții și barem orientativ

Problema 1. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un unic $c_n \in (0, 1)$, astfel încât

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{1}{1+(c_n)^n}$$

și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n(c_n)^n$.

Radu Pop

Soluție. Existența lui c_n este asigurată de teorema de medie aplicată funcției continue $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (1+x^n)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Din injectivitatea lui f_n rezultă unicitatea lui c_n **1 punct**

Fie $I_n = \int_0^1 (1+x^n)^{-1} dx$. Cum $n(c_n)^n = n(1/I_n - 1)$, iar $|I_n - 1| = \left| \int_0^1 \frac{-x^n}{1+x^n} dx \right| \leq \int_0^1 x^n dx = 1/(n+1)$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$, este suficient să calculăm $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - I_n)$ **2 puncte**

Avem $n(1 - I_n) = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \int_0^1 x \cdot (\ln(1+x^n))' dx = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ **2 puncte**

Din $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, **1 punct**
rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} n(c_n)^n = \ln 2$ **1 punct**

Problema 2. Fie A un inel și fie D mulțimea elementelor sale neinvertibile. Știind că $a^2 = 0$ oricare ar fi $a \in D$, să se arate că:

- (a) $axa = 0$ oricare ar fi $a \in D$ și $x \in A$;
(b) dacă D este mulțime finită cu cel puțin două elemente, atunci există $a \in D$, $a \neq 0$, astfel încât $ab = ba = 0$, oricare ar fi $b \in D$.

Ioan Băetu

Soluție. (a) Fie $a \in D$ și $x \in U(A)$. Cum $ax \in D$ rezultă că $axax = 0$, deci $axa = 0$ **1 punct**

Dacă $x \in D$, atunci $1+x \in U(A)$, deci $a+ax = a(1+x) \in D$. Obținem $0 = (a+ax)^2 = a^2 + a^2x + axa + axax = axa(1+x)$, deci $axa = 0$ **1 punct**

(b) Fie P mulțimea produselor finite și nenule de elemente din D . Cum $|D| \geq 2$, P este nevidă. **2 puncte**

Dacă $x = a_1 a_2 \cdots a_k \in P$, atunci $a_i \neq a_j$ pentru $i \neq j$. Într-adevăr, dacă există $i < j$ cu $a_i = a_j$, atunci $x = a_1 a_2 \cdots a_i (a_{i+1} \cdots a_{j-1}) a_i \cdots a_k = 0$, fals. Rezultă că P este finită. **2 puncte**

Fie $a = a_1 a_2 \cdots a_k \in P$ pentru care k este maxim. Dacă b este unul dintre factorii lui a atunci $ab = ba = 0$, conform (a). În caz contrar, cuvintele ab și ba au lungimea strict mai mare decât k , deci nu aparțin lui P și prin urmare $ab = ba = 0$ **1 punct**

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare și $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este continuă în a dacă și numai dacă există un șir $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât

$$\int_a^{a+a_n} f(x) dx + \int_a^{a-a_n} f(x) dx \leq \frac{a_n}{n},$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dan Marinescu

Soluție. Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Cum f este continuă în a , atunci F este derivabilă în a și $F'(a) = f(a)$. Rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $\delta_n > 0$ astfel încât $|F(x)/(x-a) - f(a)| \leq 1/(2n)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-a| < \delta_n$. Fie $a_n = \delta_n/2$, $n \geq 1$.

Pentru $x = a + a_n$ obținem $F(a + a_n)/a_n - f(a) \leq 1/(2n)$, iar pentru $x = a - a_n$ obținem $f(a) - F(a - a_n)/(-a_n) \leq 1/(2n)$. Prin adunarea celor două inegalități obținem $F(a + a_n) + F(a - a_n) \leq a_n/n$, deci inegalitatea cerută. **3 puncte**

Reciproc, deoarece f este crescătoare, rezultă că $g : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = F(x)/(x-a)$, este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Într-adevăr, fie $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $a < x < y$. Cum $(x-a)F(y) = (x-a) \int_a^x f(t) dt + (x-a) \int_x^y f(t) dt \geq (x-a) \int_a^x f(t) dt + (x-a)(y-x)f(x) \geq (x-a) \int_a^x f(t) dt + (y-x) \int_a^x f(t) dt = (y-a)F(x)$, deducem $g(y) \geq g(x)$. Analog pentru $x < y < a$ și $x < a < y$.

..... **1 punct**

Fie $x_n \in (0, a_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cu $x_n \rightarrow 0$. Din monotonie lui g rezultă că $g(a + x_n) - g(a - x_n) \leq g(a + a_n) - g(a - a_n) \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Prin trecere la limită obținem $g(a+0) \leq g(a-0)$. Cum $g(a-0) \leq g(a+0)$ rezultă că $g(a+0) = g(a-0) \in \mathbb{R}$, deci F este derivabilă în a și de aici concluzia.

..... **3 puncte**

Problema 4. Fie K un corp finit cu q elemente, $q \geq 3$. Notăm cu M mulțimea polinoamelor de grad $q-2$ din $K[X]$ care au toți coeficienții nenuli și distincți doi câte doi. Determinați numărul polinoamelor din M care au $q-2$ rădăcini distincte în K .

Marian Andronache

Soluție. Cum orice polinom g din M este asociat în divizibilitate cu un unic polinom f din M , astfel încât $f(0) = 1$, vom determina numărul polinoamelor de forma $f = 1 + a_1X + \dots + a_{q-2}X^{q-2}$, care au proprietatea din enunț.

Fie f un astfel de polinom, fie x_1, \dots, x_{q-2} rădăcinile sale și fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{q-3} & a_{q-2} \\ a_{q-2} & 1 & a_1 & \dots & a_{q-4} & a_{q-3} \\ a_{q-3} & a_{q-2} & 1 & \dots & a_{q-5} & a_{q-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & 1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{q-2} & 1 \end{pmatrix}$$

și

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ y & x_1 & x_2 & \dots & x_{q-3} & x_{q-2} \\ y^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{q-3}^2 & x_{q-2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y^{q-3} & x_1^{q-3} & x_2^{q-3} & \dots & x_{q-3}^{q-3} & x_{q-2}^{q-3} \\ y^{q-2} & x_1^{q-2} & x_2^{q-2} & \dots & x_{q-3}^{q-2} & x_{q-2}^{q-2} \end{pmatrix},$$

unde $K^* = \{y, x_1, x_2, \dots, x_{q-2}\}$. Cum $x^{q-1} = 1$, oricare ar fi x în K^* , obținem

$$AB = \begin{pmatrix} f(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ yf(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y^2f(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y^{q-3}f(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y^{q-2}f(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 puncte

Deoarece $f(y) \neq 0$ și B este inversabilă în $\mathcal{M}_{q-1}(K)$, rezultă că rangul lui A este 1, deci toți minorii săi de ordin 2 sunt nuli. În particular,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} a_1 & a_{q-2} \\ 1 & a_{q-3} \end{vmatrix} = 0,$$

i.e., $a_2 = a_1^2, a_3 = a_1^3, \dots, a_{q-2} = a_1^{q-2}$, deci mulțimea coeficienților lui f este $\{1, a_1, a_1^2, \dots, a_1^{q-2}\}$. Cum această mulțime este egală cu K^* , rezultă că a_1 este un generator al grupului multiplicativ (K^*, \cdot) și $f = 1 + a_1X + a_1^2X^2 + \dots + a_1^{q-2}X^{q-2}$. **2 puncte**

Reciproc, orice polinom $f = 1 + aX + a^2X^2 + \dots + a^{q-2}X^{q-2}$, unde a este un generator al grupului multiplicativ (K^*, \cdot) , are proprietatea din enunț, deoarece $f(a^{-1}X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{q-2} = \prod_{\alpha \in K^* \setminus \{1\}} (X - \alpha)$, deci f are rădăcinile $a\alpha$, unde $\alpha \in K^* \setminus \{1\}$. **2 puncte**

Întrucât K^* are $\phi(q-1)$ generatori, rezultă că numărul cerut este $(q-1)\phi(q-1)$. **1 punct**