

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016
CLASA a X-a

Enunțuri și bareme

Problema 1.

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$ astfel încât $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Demonstrați că funcția

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (1 + a_1^x) \cdot (1 + a_2^x) \cdot \dots \cdot (1 + a_n^x)$$

este crescătoare.

Soluție și barem.

După înmulțiri obținem

$$f(x) = (1 + a_1^x) \cdot (1 + a_2^x) \cdot \dots \cdot (1 + a_n^x) = 1 + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i^x + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i^x a_j^x + \dots + a_1^x a_2^x \dots a_n^x \dots \dots \dots \mathbf{1p}$$

Deoarece $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, expresia funcției f poate fi scrisă ca o sumă de expresii de forma $a^x + \frac{1}{a^x}$, unde $a = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$, cu $k \leq n$. $\dots \dots \dots \mathbf{2p}$

Pentru orice $a > 0$, considerăm funcția $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = a^x + a^{-x}$. Fie $t > 0$. Atunci $g(x+t) - g(x) = \frac{a^{2x+2t} + 1}{a^{x+t}} - \frac{a^{2x} + 1}{a^x} = \frac{a^{2x+2t} - a^{2x+t} - a^t + 1}{a^{x+t}} = \frac{(a^{2x+t} - 1)(a^t - 1)}{a^{x+t}} \geq 0$, deci funcția g este crescătoare $\dots \dots \dots \mathbf{3p}$

Atunci funcția f este crescătoare ca o sumă de funcții crescătoare. $\dots \dots \mathbf{1p}$

Problema 2.

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile

$$(P1) f(x+y) \leq f(x) + f(y),$$

$$(P2) f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ și $t \in [0, 1]$.

a) Demonstrați că oricare ar fi $a \leq b \leq c \leq d$, astfel încât $d - c = b - a$, are loc inegalitatea

$$f(b) + f(c) \leq f(a) + f(d).$$

b) Demonstrați că

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (n-2)(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} f(x_i + x_j),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, și $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Soluție și barem. a) Ipoteza conduce la existența unui număr $t \in [0, 1]$, astfel încât $b = ta + (1-t)d$ și $c = (1-t)a + td$ **2p**
Aplicăm (P2) și obținem

$$f(b) = f(ta + (1-t)d) \leq t(f(a)) + (1-t)f(d).$$

Analog, $f(c) \leq (1-t)f(a) + tf(d)$. Adunăm cele două inegalități și obținem concluzia. **1p**

b) Pentru început, demonstrăm cazul $n = 3$. Două dintre numerele x, y, z sunt simultan pozitive sau simultan negative. Fie x, y acestea. Dacă $x \geq 0$ atunci $z + (x + y + z) = (x + z) + (y + z)$ și $z \leq x + z, y + z \leq x + y + z$. Punctul anterior conduce la

$$f(x + z) + f(y + z) \leq f(z) + f(x + y + z).$$

Concluzia se obține prin adunarea inegalității anterioare cu inegalitatea $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. Dacă $x < 0$, atunci $x + y + z \leq y + z, z + x \leq z$ și calculele sunt similare. **2p**

Presupunem acum inegalitatea adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n + 1$. Ipoteza de inducție aplicată numerelor x_1, x_2, \dots, x_{n-1} și $x_n + x_{n+1}$ conduce la:

$$\begin{aligned} & f(x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}) + (n-2)(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n + x_{n+1})) \\ & \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} f(x_i + x_j) + \sum_{1 \leq i \leq n-1} f(x_i + x_n + x_{n+1}). \end{aligned}$$

Concluzia se deduce dacă folosim inegalitatea

$$f(x_i + x_n + x_{n+1}) \geq f(x_i + x_n) + f(x_i + x_{n+1}) + f(x_n + x_{n+1}) - f(x_i) - f(x_n) - f(x_{n+1})$$

și însumăm. **2p**

Problema 3.

a) În planul complex de origine O , considerăm punctele A și B , de afixe nenule a și respectiv b . Arătați că $S_{[OAB]} = \frac{1}{4} |\bar{a}b - a\bar{b}|$, unde $S_{[OAB]}$ reprezintă aria triunghiului OAB .

b) Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc \mathcal{C} de centru O . Pentru un punct P interior cercului \mathcal{C} , notăm cu $S(P)$ aria triunghiului având lungimile

laturilor egale cu distanțele de la P la vârfurile triunghiului. Fie P_1 și P_2 două puncte distincte interioare cercului \mathcal{C} . Arătați $S(P_1) = S(P_2)$ dacă și numai dacă $OP_1 = OP_2$.

Soluție și barem. a) Presupunem că triunghiul OAB este orientat în sens trigonometric. Atunci $m(\angle AOB) = \arg \frac{b}{a}$, iar dacă este invers orientat obținem $m(\angle AOB) = \arg \frac{a}{b}$. Atunci $\sin(\angle AOB) = \left| \frac{|a|}{2|b|} \left(\frac{b}{a} - \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \right) \right| = \frac{|\bar{a}b - a\bar{b}|}{2|a||b|}$ și deci $S_{[OAB]} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin(\angle AOB)$, de unde obținem concluzia. **2p**

b) Fie $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Putem presupune că afixele punctelor A, B și C sunt $1, \varepsilon$, respectiv ε^2 . Fie P , un punct de afix p , interior cercului. Atunci $(p-1) + \varepsilon(p-\varepsilon) + \varepsilon^2(p-\varepsilon^2) = 0$. Fie punctele $D(p-1)$, $E(\varepsilon(p-\varepsilon))$ și $F(\varepsilon^2(p-\varepsilon^2))$. În plus, $OD = PA$, $OE = PB$ și $OF = PC$.

Fie J , astfel încât $ODJF$ este paralelogram. Obținem că punctul J are afixul opus afixului lui F . Atunci $OJ = PC$, iar triunghiul ODJ are laturile de lungimi PA, PB, PC **2p**

$$\begin{aligned} \text{Dar } S_{[ODJ]} &= S_{[ODE]} = \frac{1}{4} |(\bar{p}-1) \cdot \varepsilon \cdot (p-\varepsilon) - (p-1) \cdot \bar{\varepsilon} \cdot (\bar{p}-\bar{\varepsilon})| \\ &= \frac{1}{4} ((\varepsilon - \varepsilon^2) |p|^2 - (\varepsilon - \varepsilon^2)) = \frac{\sqrt{3}}{4} ||p|^2 - 1|. \end{aligned}$$

Dar $|p| < 1$, deci $S_{[ODE]} = S(P) = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 - |p|^2)$ **2p**

Revenind la punctele P_1 și P_2 din ipoteză, notăm cu p_1 , respectiv p_2 , afixe lor. Atunci $S(P_1) = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 - |p_1|^2)$, și $S(P_2) = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 - |p_2|^2)$. Atunci $S(P_1) = S(P_2)$ dacă și numai dacă $|p_1| = |p_2|$, adică $OP_1 = OP_2$ **1p**

Problema 4.

Oamenii unui trib străvechi foloseau o limbă în care cuvintele erau formate doar cu literele A și B . Cercetătorii au descoperit că pentru oricare două cuvinte de lungimi egale, există cel puțin trei poziții corespondente în care literele sunt diferite. De exemplu, cuvintele $ABBAA$ și $AAAAB$ diferă în pozițiile 2, 3 și 5, adică în trei poziții.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Demonstrați că în această limbă nu pot exista mai mult de $\left\lceil \frac{2^n}{n+1} \right\rceil$ cuvinte de lungime n ($[a]$ este partea întreagă a numărului real a).

Soluție și barem. Notăm cu C , mulțimea tuturor cuvintelor de lungime n , care s-ar putea forma (pot fi și cuvinte care nu fac partea neapărat din limba tribului). Atunci $\text{Card}(C) = 2^n$ **1p**

Pentru două cuvinte oarecare x și y , din C , notăm $d(x, y)$, numărul de poziții în care literele sunt diferite. Evident $d(x, x) = 0$ și $d(x, y) = d(y, x)$. Pentru

orice $x \in C$, definim mulțimea $C_x = \{y \in C \mid d(x, y) \leq 1\}$.

Atunci $\text{Card}(C_x) = n + 1$ **2p**

Dacă a, b sunt cuvinte de lungime n din limbă, atunci $d(a, b) \geq 3$, deci $C_a \cap C_b = \emptyset$ **2p**

Fie D mulțimea tuturor cuvintelor de lungime n din limbă. Atunci $\bigcup_{a \in D} C_a \subset$

C , de unde $\text{Card}\left(\bigcup_{a \in D} C_a\right) \leq \text{Card}(C)$. Dar $\text{Card}\left(\bigcup_{a \in D} C_a\right) = (n + 1) \cdot \text{Card}(D)$,

deci $(n + 1) \cdot \text{Card}(D) \leq 2^n$, de unde $\text{Card}(D) \leq \frac{2^n}{n + 1}$. Deoarece $\text{Card}(D) \in \mathbb{N}$,

obținem concluzia. **2p**