Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureş, 20 aprilie 2016
CLASA a 11-a

Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice care satisface următoarele condiţii: $\det(A^{2014} - I_2) = \det(A^{2014} + I_2)$ şi $\det(A^{2016} - I_2) = \det(A^{2016} + I_2)$. Demonstraţi că $\det(A^n - I_2) = \det(A^n + I_2)$, pentru orice număr natural nenul n.

Soluţie. Pentru $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are loc relaţia

$$\det(M - xI_2) = x^2 - \mathrm{tr}(M)x + \det(M),\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice care satisface condiţiile din enunţ. Din (1) obţinem

$$\mathrm{tr}\left(A^{2014}\right) = \mathrm{tr}\left(A^{2016}\right) = 0. \tag{2}$$

.... **1 punct**

Conform teoremei Cayley-Hamilton, avem

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2. \tag{3}$$

.... **1 punct**

1) Dacă $\mathrm{tr}(A) = 0$, atunci din (3) obţinem $A^2 = -\det(A)I_2$, de unde $A^{2014} = -\det^{1007}(A)I_2$. Din (2) rezultă $\det(A) = 0$. .... **1 punct**

2) Dacă $\det(A) = 0$, atunci din (3) obţinem $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$. Prin inducţie, $A^{n+1} = \mathrm{tr}^n(A)A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $\mathrm{tr}(A^n) = \mathrm{tr}^n(A)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. În particular, conform (2), $0 = \mathrm{tr}(A^{2014}) = \mathrm{tr}^{2014}(A)$, deci $\mathrm{tr}(A) = 0$. .... **1 punct**

Presupunem, prin reducere la absurd, $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ şi $\det(A) \neq 0$. Din (3), $A^{2016} - \mathrm{tr}(A)A^{2015} + \det(A)A^{2014} = O_2$. Atunci $\mathrm{tr}(A^{2016}) - \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^{2015}) + \det(A)\mathrm{tr}(A^{2014}) = 0$. Conform (2) şi presupunerii, obţinem $\mathrm{tr}(A^{2015}) = 0$. Din (3), deducem $\mathrm{tr}(A^n) = \dfrac{1}{\det(A)}\left[\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}\left(A^{n+1}\right) - \mathrm{tr}\left(A^{n+2}\right)\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel, pornind de la $\mathrm{tr}(A^{2014}) = \mathrm{tr}(A^{2015}) = 0$, obţinem, în mod recurent, $\mathrm{tr}(A^{2013}) = 0$, $\mathrm{tr}(A^{2012}) = 0, \cdots, \mathrm{tr}(A) = 0$. Contradicţie.

În concluzie $\mathrm{tr}(A) = 0$ şi $\det(A) = 0$. .... **2 puncte**

Din (3) rezultă $A^2 = O_2$, de unde obţinem $A^n = O_2$, $\forall\, n \geq 2$. Atunci, pentru $n \geq 2$, avem $\det(A^n - I_2) = \det(-I_2) = 1 = \det(I_2) = \det(A^n + I_2)$. Pentru $n = 1$, conform (1), $\det(A - I_2) = 1 = \det(A + I_2)$. .... **1 punct**

Problema 2. Pornind de la o matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ având liniile $L_1, L_2, \cdots, L_n$, construim matricele $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu liniile $O, L_2, \cdots, L_n$ şi $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu liniile $L_2, \cdots, L_n, O$, unde O desemnează o linie cu toate elementele nule. Fie matricele $D = A^{-1} \cdot B$ şi $E = A^{-1} \cdot C$. Arătaţi că:

a) $\operatorname{rang}(D) = \operatorname{rang}\left(D^2\right) = \cdots = \operatorname{rang}\left(D^n\right)$;

b) $\operatorname{rang}(E) > \operatorname{rang}\left(E^2\right) > \cdots > \operatorname{rang}\left(E^n\right)$.

Soluţie. a) Considerăm matricea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem $D = A^{-1}PA$ .... **1 punct**
Cum $P^2 = P$, obţinem $P^k = P,\ k \in \mathbb{N}^*$ (inducţie). .... **1 punct**
Atunci $D^k = \left(A^{-1}PA\right)^k = A^{-1}P^kA = A^{-1}PA = D,\ k \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, $\operatorname{rang}\left(D^k\right) = \operatorname{rang}(D) = \operatorname{rang}(P) = n-1,\ k = \overline{1,n}$. .... **1 punct**
b) Fie matricea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Avem $E = A^{-1}QA$. .... **1 punct**
Se verifică inductiv că matricea Q^k se reprezintă în blocuri $\left(\dfrac{O_{n-k,k}|\ I_{n-k}}{O_{k,n}}\right)$ (unde $I_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ este matricea unitate, iar $O_{p,q} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ este matricea nulă), pentru $k = \overline{1, n-1}$. Apoi, $Q^n = O_n$. .... **2 puncte**
Din $E^k = \left(A^{-1}QA\right)^k = A^{-1}Q^kA,\ k \in \mathbb{N}^*$, rezultă

$$\operatorname{rang}\left(E^k\right) = \operatorname{rang}\left(Q^k\right) = n-k,\ k = \overline{1,n},$$

de unde concluzia. .... **1 punct**

Problema 3. Fie $a \in \mathbb{R}$. Considerăm o funcţie $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$. Arătaţi că următoarele două afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{a+\varepsilon}} = 0$ şi $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{a-\varepsilon}} = \infty$, pentru orice $\varepsilon > 0$;

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln f(x)}{\ln x} = a.$

Soluţie.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Fie $\varepsilon > 0$. Conform (i), există $m_1 > 0$ astfel ca $\dfrac{f(x)}{x^{a+\varepsilon}} < 1,\ \forall\ x > m_1$ şi există $m_2 > 0$ astfel ca $\dfrac{f(x)}{x^{a-\varepsilon}} > 1,\ \forall\ x > m_2$. Notăm $m = \max\{m_1, m_2, 1\}$. Atunci $x^{a-\varepsilon} < f(x) < x^{a+\varepsilon},\ \forall\ x > m$. Prin logaritmare, obţinem inegalitatea $a - \varepsilon < \dfrac{\ln f(x)}{\ln x} < a + \varepsilon,\ \forall\ x > m$. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln f(x)}{\ln x} = a$. .... **3 puncte**

$(ii) \Rightarrow (i)$. Fie $\varepsilon > 0$. Conform (ii), există $m > 1$ astfel ca

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\ln f(x)}{\ln x} < a + \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ x > m.$$

Obţinem $x^{a-\varepsilon/2} < f(x) < x^{a+\varepsilon/2},\ \forall\ x > m$. Ca urmare, $\dfrac{f(x)}{x^{a+\varepsilon}} < \dfrac{1}{x^{\varepsilon/2}},\ \forall\ x > m$ şi $\dfrac{f(x)}{x^{a-\varepsilon}} > x^{\varepsilon/2},\ \forall\ x > m$. Dar $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\varepsilon/2} = \infty$ şi $f(x) > 0,\ \forall\ x > 0$. Conform criteriilor cleşte şi al majorării se obţin limitele de la (i). .... **4 puncte**

Problema 4. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că f^2 este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $(f^2)' = f$.

Soluţie.

Funcţia identic nulă verifică cerinţele. .... **1 punct**

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie neidentic nulă care verifică condiţiile din enunţ. Există deci $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x_0) \neq 0$. Cum f^2 este derivabilă, deci continuă, $f^2 > 0$ pe o vecinătate a lui x_0. Notăm

$$a = \inf\left\{t \in (-\infty, x_0)\,|\,f^2(x) > 0,\ \forall\ x \in [t, x_0]\right\},$$

$$b = \sup\left\{t \in (x_0, \infty)\,|\,f^2(x) > 0,\ \forall\ x \in [x_0, t]\right\}.$$

Avem $-\infty \le a < x_0 < b \le \infty$ şi $f(x) \neq 0,\ \forall\ x \in (a, b)$. Cum $f = (f^2)'$ are proprietatea lui Darboux (conform teoremei lui Darboux), deducem că f păstrează semn constant pe (a, b). .... **1 punct**

1) Presupunem $f(x) > 0,\ \forall\ x \in (a, b)$. Atunci $f = \sqrt{f^2}$ pe (a, b), deci f este derivabilă pe (a, b). Conform ipotezei, avem $2f(x)f'(x) = f(x),\ \forall\ x \in (a, b)$. Rezultă $f'(x) = \dfrac{1}{2},\ \forall\ x \in (a, b)$. Deducem că există $c \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) = \dfrac{x}{2} + c,\ x \in (a, b)$. Cum $f(x) > 0,\ \forall\, x \in (a, b)$, obţinem $a \ge -2c$ (deci a este finit), În acest caz, din definiţia lui a şi continuitatea lui f^2 rezultă $f^2(a) = 0$. Atunci $c = -\dfrac{a}{2}$, deci $f(x) = \dfrac{x-a}{2},\ x \in [a, b)$. Dacă b ar fi finit,

am obţine $0 = f^2(b) = \lim\limits_{x \uparrow b} \left(\dfrac{x-a}{2}\right)^2 = \dfrac{(b-a)^2}{4}$; contradicţie. Deci $b = \infty$ şi prin urmare $f(x) = \dfrac{x-a}{2},\ x \in [a, \infty)$.

Mai mult, $f(x) \leq 0,\ \forall\ x \in (-\infty, a)$. Astfel, dacă ar exista $x_1 < a$ astfel ca $f(x_1) > 0$, atunci $f(a) > 0$; contradicţie. .... **2 puncte**

2) Presupunem $f(x) < 0,\ \forall\ x \in (a, b)$. Raţionând analog, obţinem b finit, $f(x) = \dfrac{x-b}{2},\ x \in (-\infty, b]$ şi $f(x) \geq 0,\ \forall\ x \in (b, \infty)$. .... **1 punct**

Din cele de mai sus deducem că, pe lângă funcţia nulă, următoarele tipuri de funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfac condiţiile din enunţ:

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{2}, & x \geq a \end{cases},\ a \in \mathbb{R};$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-b}{2}, & x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases},\ b \in \mathbb{R};$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-b}{2}, & x \leq b \\ 0, & x \in (b, a) \\ \frac{x-a}{2}, & x \geq a \end{cases},\ a, b \in \mathbb{R},\ b < a;$

4. $f(x) = \dfrac{x}{2} + c,\ x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}.$

.... **2 puncte**