Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureş, 20 aprilie 2016

CLASA a VII-a - Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul

$$\sqrt{n+3}+\sqrt{n+\sqrt{n+3}}$$

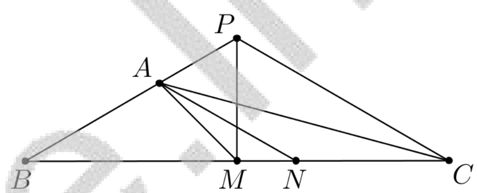
este natural.

Soluţie. Notând $m=\sqrt{n+3}+\sqrt{n+\sqrt{n+3}}$, rezultă $n+\sqrt{n+3}=(m-\sqrt{n+3})^2$, de unde $(2m+1)\sqrt{n+3}=m^2+3$. Atunci există $p\in\mathbb{N}$ astfel încât $n+3=p^2$, şi, întrucât $p+\sqrt{n+p}\in\mathbb{N}$, există $q\in\mathbb{N}$ astfel încât: $n+p=q^2$ **3p**

Eliminând pe n, rezultă $p^2-3=q^2-p$, adică $4p^2+4p-12=4q^2$, sau $(2p+1)^2-(2q)^2=13$, echivalent cu $(2p+1-2q)(2p+1+2q)=13$ **3p**

Se obţine $p=3$, pentru care $n=6$ **1p**

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC, în care $m(\sphericalangle B)=30°$, $m(\sphericalangle C)=15°$, iar M este mijlocul laturii $[BC]$. Fie punctul $N\in(BC)$ astfel încât $[NC]\equiv[AB]$. Arătaţi că $[AN$ este bisectoarea unghiului MAC.



Soluţie. Fie P punctul de intersecţie al mediatoarei segmentului $[BC]$ cu AB. Atunci $m(\sphericalangle PCB)=30°$, $m(\sphericalangle PCA)=15°$ şi $m(\sphericalangle MPC)=60°$.

Cu teorema bisectoarei, aplicată în triunghiul CPB, avem $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{CP}{CB}$.

Cum $PC=PB$ şi $NC=AB$, rezultă $\dfrac{AP}{NC}=\dfrac{BP}{BC}$, adică $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{CN}{CB}$, de unde, conform reciprocei teoremei lui Thales, $AN\parallel PC$ **3p**

Deoarece $PC=2PM$ (triunghiul MPC este dreptunghic cu un unghi de 30°), avem $\dfrac{PA}{AB}=\dfrac{PC}{BC}=\dfrac{2PM}{2BM}=\dfrac{PM}{BM}$, deci, conform reciprocei teoremei bisectoarei, rezultă că $[MA$ este bisectoarea unghiului BMP **2p**

Atunci $45°=m(\sphericalangle AMB)=m(\sphericalangle ANB)+m(\sphericalangle MAN)$, şi, cum din $AN\parallel PC$ rezultă $m(\sphericalangle ANB)=30°$, obţinem $m(\sphericalangle MAN)=15°$. Dar $m(\sphericalangle BAN)=m(\sphericalangle BPC)=120°$ şi, cum $m(\sphericalangle BAC)=135°$, conchidem că $m(\sphericalangle CAN)=15°=m(\sphericalangle MAN)$, adică $[AN$ este bisectoarea unghiului MAC **2p**

Problema 3. Determinaţi numerele naturale p cu proprietatea că suma primelor p numere naturale nenule este un număr natural de patru cifre având descompunerea în factori primi $2^m \cdot 3^n \cdot (m+n)$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Evident, $m + n \geq 5$. Dacă $m + n = 5$, cea mai mare valoare pe care o poate lua numărul $N = 2^m \cdot 3^n \cdot (m+n)$ este $2^1 \cdot 3^4 \cdot 5 = 810$, care nu are patru cifre, contradicţie .. **2p**

Presupunând că $m + n \geq 11$, atunci $N \geq 2^{10} \cdot 3 \cdot 11 > 10000$, deci N nu poate avea patru cifre, contradicţie **2p**

Prin urmare, $m + n = 7$. În acest caz, numere de patru cifre sunt :

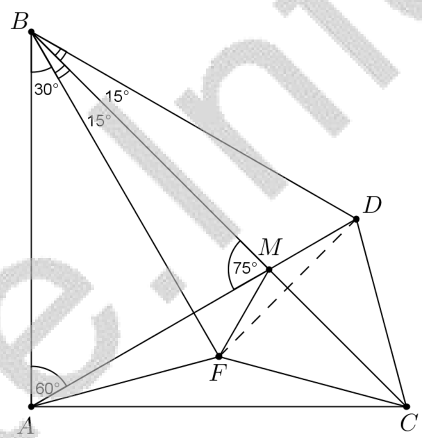
$2^6 \cdot 3^1 \cdot 7 = 1344$, $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016$, $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = 3024$, $2^3 \cdot 3^4 \cdot 7 = 4536$ şi $2^2 \cdot 3^5 \cdot 7 = 6804$.

Ţinând cont că $N = \dfrac{p(p+1)}{2}$, analizând cazurile, convine doar $N = 2016$, pentru care se obţine $p = 63$ .... **3 p**

Problema 4. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC, cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ şi punctul $M \in (BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle AMB) = 75°$. Pe bisectoarea interioară a unghiului MAC se ia un punct F astfel încât $BF = AB$. Arătaţi că:

a) dreptele AM şi BF sunt perpendiculare;

b) triunghiul CFM este isoscel.



Soluţie. a) Deoarece AMB este unghi exterior triunghiului AMC, rezultă $m(\sphericalangle MAC) = 30°$, de unde $m(\sphericalangle BAM) = 60°$ şi $m(\sphericalangle MAF) = 15°$ **1p**

Triunghiul BAF este isoscel, cu $m(\sphericalangle AFB) = m(\sphericalangle BAF) = 75°$, deci $m(\sphericalangle ABF) = 30°$, de unde, ţinând cont că $m(\sphericalangle BAM) = 60°$, rezultă că $AM \perp BF$ **1p**

b) Fie punctul D în semiplanul determinat de BC care nu conţine pe A astfel încât $BD = BF$ şi $m(\sphericalangle MBD) = 15°$. Atunci triunghiul ABD este echilateral, iar punctele A, M şi D sunt coliniare **1p**

Triunghiul ADC este isoscel, cu $m(\sphericalangle DAC) = 30°$, de unde $m(\sphericalangle ADC) = 75° = m(\sphericalangle CMD)$. Ca urmare, triunghiul CDM este isoscel, deci $[CM] \equiv [CD]$ **2p**

În triunghiul isoscel BDF, bisectoarea BC este mediatoarea segmentului $[DF]$, deci triunghiul CFD este şi el isoscel, de unde $[CF] \equiv [CD] \equiv [CM]$, adică triunghiul CFM este isoscel **2p**